# Diseño de una caja plegable de cartón

Autor 1

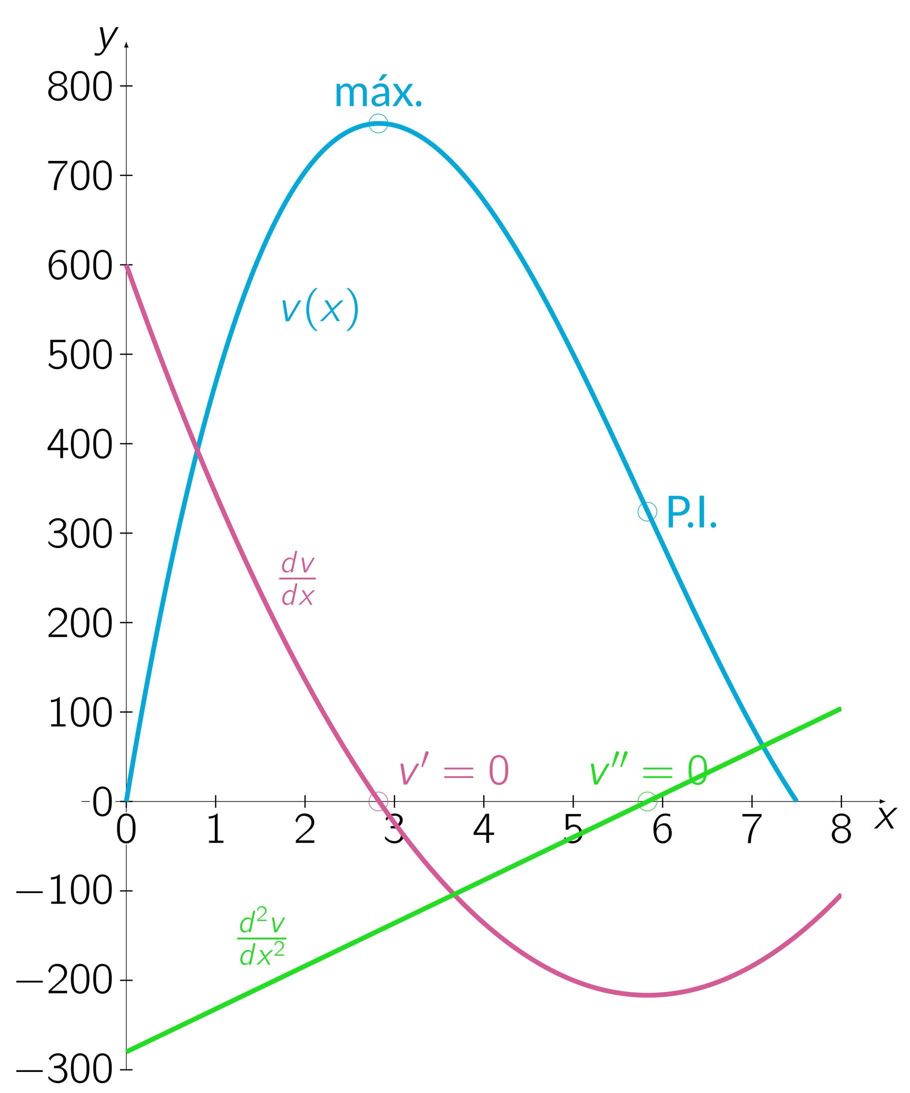
Autor 2

Colegio Seminario Diocesano de Duitama

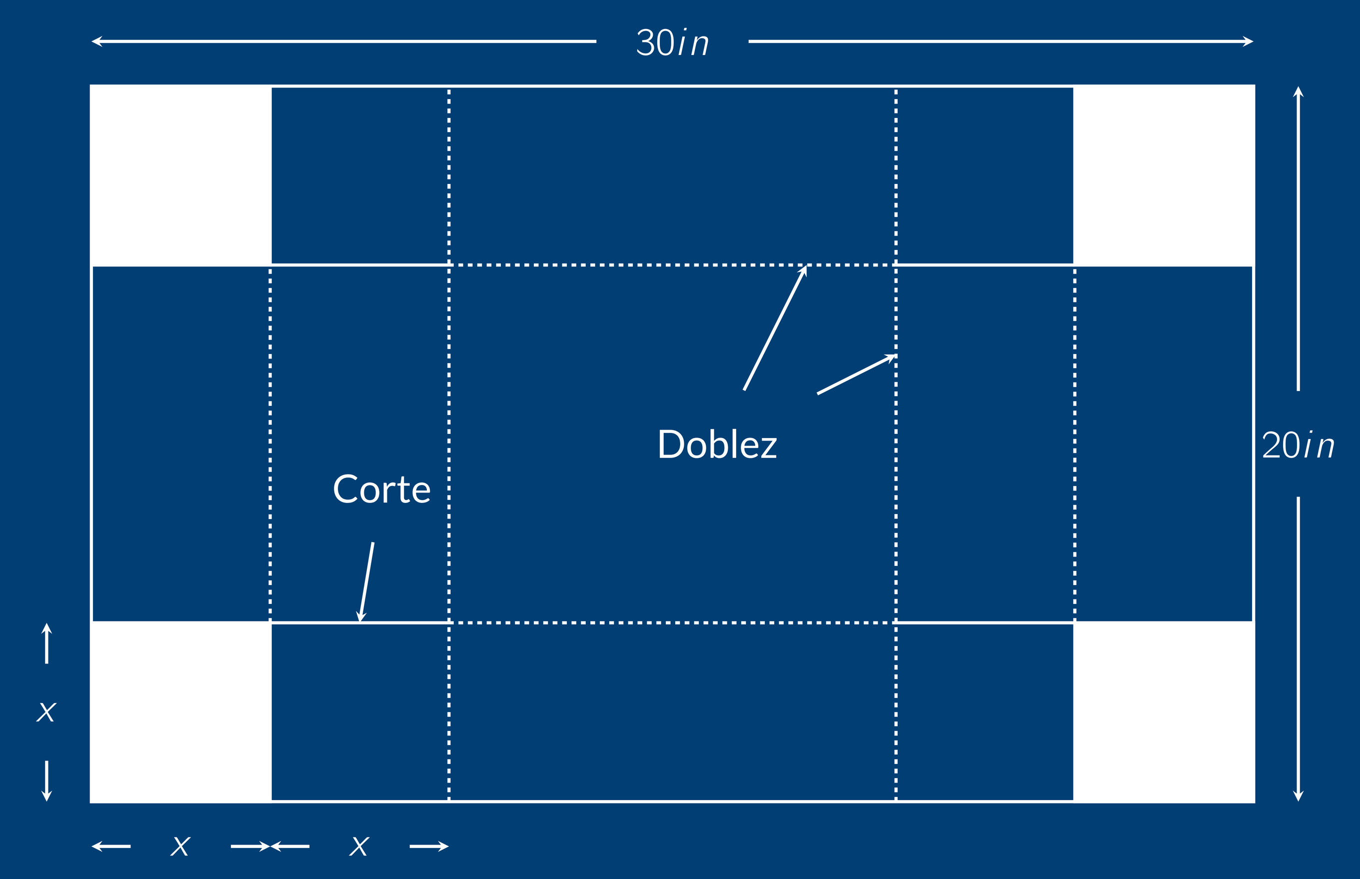
### Problema

Se producirá una caja, abierta por la parte superior, de una pieza rectangular de cartón que mide 30 pulg de largo por 20 pulg de ancho. La caja puede cerrarse al cortar un cuadrado en cada esquina, al cortar sobre las líneas sólidas interiores y doblar luego el cartón por las líneas discontinuas. Exprese el volumen de la caja como una función de la variable indicada $x$. Encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

### La función del volumen de la caja y su derivada




## Aplicaciones de la derivada
## Optimización
## Aprovechamiento de material




Escanee el QR para ver el desarrollo detallado

### Verificación

- **Variable:** $x$ la longitud de los cortes.
- **Restricciones:** Debido a que $x$ es la longitud de los cortes que es harán sobre el material, $x$ no puede ser superior a la longitud (largo o ancho) del material, en particular $x$ no puede ser superior a $\frac{30}{4}$ del largo del material entonces $0 < x < \frac{15}{2}$.
- **Modelo matemático:** El modelo matemático que define el volumen de la caja es

$$\begin{aligned} v(x) &= l \times a \times h \\ &= (30-4x)(20-2x)x \end{aligned} \tag{1}$$

- **Optimización:** Obtención de los extremos de $v$ mediante el criterio de primera derivada.

$$v' = 3x^2 - 35x + 75 \tag{2}$$

que es cero en $x_1 = \frac{35-5\sqrt{13}}{6} \approx 2{,}8287$ y $x_2 = \frac{35+5\sqrt{13}}{6} \approx 8{,}8380$. $x_2$ se descarta por estar fuera del intervalo de restricciones para $x$.
- **Determinación del máximo:** Una vez obtenido el valor extremo en el intervalo de restricciones se comprueba que éste se corresponde al máximo mediante el criterio de la segunda derivada.

$$v'' = 6x - 35, \tag{3}$$

entonces $v'' < 0$ en el intervalo $\left(-\infty, \frac{35}{6}\right)$ i.e $v$ es cóncava hacia abajo en este intervalo y ya que $x_2 \in \left(-\infty, \frac{35}{6}\right)$, $x_2$ es máximo local en el intervalo de restricciones.
- **Interpretación:** $x \approx 2{,}8287in$ es la longitud máxima de los cortes que se pueden aplicar al material para obtener la caja de volumen máximo por lo tanto la longitud de los lados de la caja (largo) $l = 30 - 4x$, (ancho) $a = 20 - 2x$ y (altura) $h = x$.
- **Conclusión:** Las dimensiones de la caja de volumen máximo que puede construirse con las condiciones dadas son Largo $18{,}72pul$ y ancho $14{,}36pul$. El Volumen máximo de la caja es de aproximadamente $758pul^3$.