

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة زيان عاشور بالجلفة



كلية العلوم والتكنولوجيا

قسم الهندسة الكهربائية

مذكرة مقدمة في استيفاء جزئي لمتطلبات درجة الماستر في الآلية

اختصاص: آلية وأنظمة

من طرف الطالب: نهار محمد الأمين

تحت عنوان

التحكم في استقرارية الأنظمة ذات التأخر

للمناقشة أمام اللجنة:

الرئيس	بسيصة لخضر	أستاذ ت.ع.	جامعة الجلفة
المؤطر 1	ربيبي عيسى	أستاذ باحث	المعهد الجزائري للبتروك
المؤطر 2	قاسمي كمال	أستاذ ت.ع.	جامعة الجلفة
المناقش 1	ارفيس أحمد	أستاذ محاضر	جامعة الجلفة
المناقش 2	جودي دليلة	أستاذ محاضر	جامعة الجلفة

ملخص

تهتم هذه المذكرة بالتحكم في استقرارية الأنظمة غير الخطية من الرتب الكسرية ذات التأخر المنمذجة بطريقة تاكاجي سوجينو. قمنا بدراسة تحليلية حول تأثير عدد من المتحكمات على الاستقرارية، فكان المنطلق باستخدام متحكم غير ذي تأخر لضمان استقرار النظام ثم استخدام متحكم ذو تأخر صرف بغرض تحسين أداء النظام وأخيرا تطوير متحكم ثالث من اقتراحنا و يعتبر تركيبة من المتحكمين معا. المحاكاة تمت على نموذج عنفة مائية و قد أفضت النتائج إلى أن المتحكم الأول يسمح بجعل النظام مستقرا والمتحكم الثاني ذو التأخر الصرف يعطي تحسنا على أداء النظام بينما المتحكم الأخير يسمح بدمج مزايا كلا المتحكمين معا في نظام تحكم واحد.

كلمات مفتاحية: التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية، الاستقرارية، التحكم، المنطق الضبابي، نموذج تاكاجي سوجينو، نظام ذو تأخر.

Abstract

This manuscript deals with stabilization of nonlinear fractional order systems modeled by fuzzy Takagi-Sugeno systems. In this context, we elaborated an analytic study on some stabilizing controllers. The first one is the controller without delay ensuring the system stability, the second with time delay to enhance the system performance and the last one is our main contribution and is a combination of the previous controllers. Simulations were done on a benchmark hydraulic system and the obtained results showed that the first controller ensures the system stability and, the second delayed one allows the system performance enhancement while the last one gathers the performance of the two controllers in a one control structure.

Keywords: Fractional calculus, Stability, Control, Fuzzy logic, Takagi-Sugeno model, delayed system.

Résumé

Ce manuscrit traite la stabilisation des systèmes non linéaires à ordre fractionnaire modélisés par des systèmes flous de type Takagi-Sugeno. Dans ce contexte, nous avons élaboré une étude analytique sur quelques stabilisateurs. Le premier était le contrôleur sans retard pour assurer la stabilité du système, le second à retard afin d'améliorer les performances de commande et le dernier, qu'est notre principale contribution, est une combinaison des contrôleurs précédents. Des simulations ont été faites sur un système hydraulique modèle et les résultats obtenus ont montré que le premier contrôleur assure principalement la stabilité du système, le second permet d'améliorer les performances du système tandis que le dernier combine les performances des deux contrôleurs dans une seule structure de commande.

Mots clés : Calcul fractionnaire, Stabilité, Commande, Logique floue, Modèle Takagi-Sugeno, Système à retard.

إهداء

الحمد لله الذي لم يُسْتَفْتَحْ بأفضلٍ من اسمه كلام، ولم يُنَلَّ بأحسن من توفيقه مرام، ثم الصلاة على نبيه المبعوث، وعلى آله وصحابه مقاليد السعادة ومفاتيحها، ونجوم الهداية ومصاييحها، الطيبين الأخيار، والطاهرين الأبرار. أما بعد، فالشكر لوالديّ قرّة العينين، وروحي التي بين الجنين، شكرٌ لا انقطاع لراتبه، ولا إقلاع لسحائبه، شكرٌ لفضلهما الذي محالٌ أن يجاريه قلبي، أو أن يُحيطَ به كَلبي، شرح الله على طول العمر صدرَيهما، ورفع في السماء قدرَيهما، ولا زالت تحييهما المعالي، وتخدمهما بأبيضها وأسودها الأيام والليالي. ثم الشكر لجميع أهل بيتي وأقاربي ولإخوتي عبد الله بخيتي وعماد الدين علي وصالح لبوخ، أسأل الله أن يديمهم شمساً في فلك العلوم تستنير بأشعتها أنوار الآفاق، وقدوات يستلهم منها الخلق مكارم الأخلاق، وأن يطيل في أفياء السلامة بقاهم، وأن يسبغ نعماه بالبركات عليهم، وجميع من وسعتهم ذاكرتي ولم تسعهم مذكرتي.

نهار محمد الأمين

شكر و عرفان

الشكر للأستاذين المؤطرين اللذين لا يؤدي اللسان الفصيحُ حقَّ
بعضِ صفاتهما، ولا يحيط القلم البليغُ بمِعْشَارِ فضائلهما، أسأله
سبحانه أن يرفع مقامهما في مرقيَّ يقصرُ عنه طَرْفُ الإدراك،
ويجعلَ محلَّ رِفْعَتِهما فوق هامِ النجوم والأفلاك.
كما أتقدم بجزيل الشكر لرئيس لجنة المناقشة والأعضاء المناقشين
كل باسمه و درجته ومقامه وجميع من درسي أوله فضل علي.

نهار محمد الأمين

قائمة الاختصارات و المصطلحات و الرموز¹

Natural response	استجابة طبيعية
Forced response	استجابة قسرية
Total response	استجابة كلية
Stability	استقرار
Marginal stability	استقرار حرج
Global stability	استقرار شامل
Performance	أداء
Rotor	الجزء الدوار
Euclidean space	الفضاء الإقليدي
Time delay systems	أنظمة ذات التأخر
Linear time-invariant systems	أنظمة غير متغيرة مع الزمن
Conservative mechanical systems	أنظمة ميكانيكية محافظة
Delay	تأخر
Control	تحكم
Design	تصميم
Calculus	تفاضل وتكامل
Multivariable calculus	تفاضل وتكامل متعدد المتغيرات
Fractional calculus	تفاضل وتكامل من الرتب الكسرية
Local linearization	تقريب محلي
Integral	تكامل
Extension	تمديد
Combination	توفيقات
States	حالات
Membership function	دالة الانتمائية (العضوية)
Analytic function	دالة تحليلية

Vector function	دالة شعاعية
Convex function	دالة محدبة
Bounded Bounded-Input Output (BIBO)	دخل محدود-مخرج محدود
Vector	شعاع (متجه)
Leibniz integral rule	صيغة لايبنتز التكاملية
Potential energy	طاقة الكامنة
Unforced	غير مغذى
Eigenvalues	قيم ذاتية
Fractional	كسري
Lemma	توطئة
Schwarz inequality	متباينة شوارتز
Linear Matrix Inequalities (LMI)	متراجحات مصفوفية خطية
Simulation	محاكاة
Transpose of matrix (tr)	مُدور مصفوفة
Higher order derivative	المشتقات ذات الرتب العليا
Feedback gain matrix	مصفوفة الكسب الخاصة بالتغذية الراجعة
Negative definite matrix	مصفوفة معرفة سالبة
Singular matrix	مصفوفة شاذة
Negative Semi-definite matrix	مصفوفة معرفة شبه سالبة
Positive Semi-definite matrix	مصفوفة معرفة شبه موجبة
Non-definite matrix	مصفوفة غير معرفة
Symmetric matrix	مصفوفة متناظرة
Skew-symmetric Matrix	مصفوفة متناظرة بالسالب
Positive definite matrix	مصفوفة معرفة موجبة
Factorial	عاملي
Asymptotic	مقارب
Smooth curve	منحنى سلس
Fuzzy Logic	منطق ضبابي
Mean value theorem	نظرية القيم المتوسطة
Equilibrium point	نقطة التوازن
Model	نموذج

Servomotor	محرك مؤازر
Relay	المرحل
\mathbb{C}	مجموعة الأعداد المركبة
\mathbb{R}	مجموعة الأعداد الحقيقية
\mathbb{N}	مجموعة الأعداد الطبيعية
\mathbb{Z}	مجموعة الأعداد الصحيحة
\mathbb{R}^+	مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة
\mathbb{R}^n	الفضاء الإقليدي
$\mathbb{R}^{n \times m}$	فضاء المصفوفات الحقيقية
$P > 0$	المصفوفة المتناظرة المعرفة الموجبة
$P \geq 0$	المصفوفة المتناظرة المعرفة شبه الموجبة
P^T	منقول المصفوفة P
P^{-1}	مقلوب المصفوفة P
$diag(a, b)$	المصفوفة القطرية ذات عناصر القطر a, b على الترتيب
$Re(z)$	الجزء الحقيقي من العدد المركب z
$Im(z)$	الجزء التخيلي من العدد المركب z

¹تم الاعتماد أساساً على القاموس المرجعي: م. دعبول، خ. الأحمد، ب. قابيل، م. البواب، مسرد معجم مصطلحات الرياضيات، مجمع اللغة العربية، الجمهورية العربية السورية، 2018.

المحتويات

قائمة الاختصارات والمصطلحات و الرموز

قائمة الأشكال

قائمة الجداول

مقدمة عامة

1

1 عموميات

2

2 1.1 مقدمة

3 1.2 التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية

3 1.2.1 دالة غاما

4 1.2.2 صيغة كوشي التكاملية

4 1.2.3 صيغة لاينكوف

5 1.2.4 التكامل الكسري

6 1.2.5 صيغة ريمان ليوفيل

6 1.2.6 صيغة كابوتو

6 1.3 بعض خواص المصفوفات

8 1.3.1 نظرية

8 1.4 نظرية القيم المتوسطة

9 1.5 توطئات

12 1.6 الأنظمة ذات التأخر

12 1.7 المنطق الضبابي

13 1.8 الاستقرارية

13 1.8.1 استقرارية مدخلات محدودة-مخرجات محدودة

14 1.8.2 بعض نتائج أعمال لياونوف

14	1.8.3	مفهوم لياونوف للاستقرارية
16	1.9	خلاصة
17	2	دراسة الاستقرارية
17	2.1	مقدمة
17	2.2	نموذج النظام
19	2.3	الاستقرارية بمتحكم غير ذي تأخر
19	2.3.1	نظرية 1
19	2.3.2	البرهان
25	2.3.3	نظرية 2
25	2.3.4	البرهان
26	2.4	الاستقرارية بمتحكم ذو تأخر
26	2.4.1	نظرية 3
27	2.4.2	البرهان
28	2.5	الاستقرارية بالمتحكم المقترح
28	2.5.1	نظرية 4
29	2.5.2	البرهان
30	2.6	خلاصة
31	3	المحاكاة على نموذج عنفة مائية
31	3.1	مقدمة
31	3.2	وصف نظام العنفة المائية
32	3.3	النموذج الضبابي للعنفة المائية
35	3.4	نتائج المحاكاة
35	3.4.1	أداء النظام بدون متحكم
36	3.4.2	أداء النظام بمتحكم غير ذي تأخر
37	3.4.3	أداء النظام بالمتحكم المقترح
39	3.5	الخلاصة
40		خلاصة عامة

قائمة الأشكال

33	دالتي الانتماء	3.1
35	حالات النظام بدون استخدام المتحكم	3.2
36	إشارة المتحكم غير ذي تأخر	3.3
37	حالات النظام باستخدام متحكم غير ذي تأخر	3.4
38	إشارة المتحكم المقترح	3.5
38	حالات النظام باستخدام المتحكم المقترح	3.6

قائمة الجداول

34	قيم متغيرات النظام	3.1
39	تكميم نتائج الدراسة المقارنة	3.2

مقدمة عامة

إن معظم ما نشهده في الواقع الذي من حولنا من التجهيزات سواء كان ما نراه في حياتنا اليومية أو من هياكل المصانع كالمحركات والعنفات والروبوتات يعد نظاما، وكل هذه الأنظمة نحتاج إلى التحكم فيها حتى تُنفذ مهامها بشكل آلي وفق الأداء الذي نريده وهذا ما يسمى بالتحكم الآلي.

في غالب الأحيان نلجأ أثناء نمذجة هذه الأنظمة إلى استعمال بعض القوانين الفيزيائية كصيغ نيوتن ولاغرانج في الميكانيكا وقانوني كيرشوف في الكهرباء وغيرها، وبالجملة فإننا نحصل عادة من استخدام هذه القوانين جملة من المعادلات التفاضلية ذات الرتب الصحيحة، وبغرض الحصول على وصف أكثر دقة فإننا نلجأ إلى استعمال المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية.

ولما كان الواقع لا يخضع للمثالية المتصورة في الأذهان فقد فرض علينا وجود بعض الارتبايات والتأخرات إما في الأجهزة المستعملة أو في وصف النظام بحد ذاته، ومع التباين الكبير بين المعقولات والماديات وصعوبة وصف المعقولات بواسطة المعادلات كان لا بد لنا من استخدام شيء من المنطق الضبابي خصوصا طريقة تاكاجي سوجينو وذلك لسهولة التعامل معها ولقوتها في وصف التصورات العقلية بطريقة رياضية.

وفقا لما سبق فإن دراسة الأنظمة ذات التأخر الموصوفة بمعادلات تفاضلية من الرتب الكسرية تُعد موضوعا بالغ الأهمية تدعو الحاجة إلى التعمق في فهمها حتى نتمكن من تحليل هذا النوع من الأنظمة والتحكم بها، ولعل أكبر عائق يحول دون الحصول على الأداء المرغوب هو مشكل الاستقرار الذي يعتبر أهم مفهوم في التحكم الآلي، ولما كانت الاستقرار مهمة جدا فإن هذه المذكرة قد جاءت تحت عنوان "التحكم في استقرار الأنظمة ذات التأخر" والتي تحتوي على ثلاثة أبواب إليك تفصيل ما جاء فيها:

الفصل الأول: في هذا الفصل قننا بالتذكير بأهم المفاهيم المتعلقة بعلم التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية ثم عرجنا على بعض خواص المصفوفات وأهم التوططات التي لها أهمية كبيرة في تسهيل الدراسة ثم ذكرنا بالأنظمة ذات التأخر وشيء من المنطق الضبابي وفي الأخير أتينا على أهم المفاهيم المتعلقة بالاستقرار.

الفصل الثاني: في هذا الفصل قننا بذكر طريقة نمذجة الأنظمة عن طريق استخدام المنطق الضبابي وبالتحديد طريقة تاكاجي سوجينو ثم قننا بدراسة الاستقرار بمتحكم غير ذي تأخر ثم تطرقنا إلى دراسة متحكم ذي تأخر من أجل إدخال تحسينات على أداء النظام وفي الأخير عرضنا فكرة مقترحنا بدمج مجموع المتحكمين معا في نظام تحكم واحد لأجل الحصول على مزايا كلا المتحكمين.

الفصل الثالث: قننا في هذا الفصل بنمذجة نظام عنفة مائية باستخدام طريقة تاكاجي سوجينو ثم قننا بعرض نتائج محاكاة هذا النظام مع المتحكم غير ذي تأخر ومع تركيبية المتحكمين المقترحة بغرض إثبات فعاليتها على نظام قياسي وإظهار مزاياها.

الفصل 1

عموميات

1.1 مقدمة

مع اقتراب نهاية القرن السابع عشر، كان حساب التفاضل والتكامل قد بدأ في التشكل والاتضح خصوصا بعد مجهودات العالمين نيوتن ولايبنتز، كما كان قد ظهر أيضا مفهوم المشتقات ذات الرتب العليا الصحيحة والتي اصطلح لها لايبنتز الرمز $\frac{d^n y}{dt^n}$. لكنه بعد اصطلاحه هذا قام بإرسال رسالة إلى الرياضي الكبير لويبتال يبشره بميلاد الاصطلاح الجديد، ليرد عليه هذا الأخير قائلا: ماذا لو كانت $n = \frac{1}{2}$ ؟، فكتب لايبنتز رسالة بتاريخ 30 سبتمبر 1695 وكان مضمونها: هذا سيؤدي إلى مفارقة رياضية هائلة ستكون نتائجها نافعة في يوم من الأيام.

لقد كان السؤال الذي طرحه لويبتال موضوعا يتدارسه العلماء كثيرا في آخر ثلاثة قرون، وقد كان لعلماء مثل ريمان وليوفيل وغيرهم مساهمات كبيرة فيه، لذلك نستطيع أن نجزم ونصرح بكل ثقة بأن موضوع التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية لايعتبر موضوعا جديدا، بل هو مجرد تعميم وتمديد لعلم التفاضل والتكامل الكلاسيكي [1].

سنحاول في هذا الفصل استعراض ومراجعة بعض الأدوات الرياضية الضرورية المطلوبة في الأنظمة ذات التأخر، حيث سنذكر بعض النتائج الرياضية حول التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية وأهم نتائج جبر المصفوفات وبعض التوطئات الضرورية لتحليل هذا النوع من الأنظمة، ثم سنقوم بتقديم مفهوم ليابونوف للاستقرارية الذي سيتم استخدامه لاحقا في الفصل الثاني لدراسة الاستقرارية وتصميم المتحكمات الخاصة بالأنظمة ذات التأخر، وذكر بعض التعريفات التي انبثقت عن أعمال ليابونوف في الاستقرارية كمفهوم الاستقرار المتقارب والاستقرار الآسي وغير ذلك. الهدف الرئيسي من هذا الفصل هو بناء القاعدة الرياضية وذكر جميع الأدوات التي سنبنى عليها الدراسة والتي ستسمح لنا بتحليل وتصميم المتحكمات الخاصة بالأنظمة ذات التأخر، خلال كل هذا سنغفل أغلب البراهين لخروجها عن منظور هذه المذكرة لكننا سنزود ذلك كله لمواضعه من الكتب والمراجع ليستفيد مبتغي التوسع والتأصيل.

1.2 التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية

من خلال كل الذي عالجناه سابقا خلصنا إلى أن علم التفاضل والتكامل من الرتب الكسرية هو مجرد تمديد وتعميم للتفاضل والتكامل الكلاسيكي، فكان لزاما علينا أن نظهر أصل التمديد وسببه والحاجة إليه، ومن تأمل في تاريخ هذا العلم سيجد أن أهم ما انبنى عليه هو مفهوم العامل، ومن هنا سينقذح في ذهن المتلقي سؤال حلّ من الأهمية بشاهق: هل يمكن أن نعمم مفهوم العامل ليشمل مجموعة أعداد أوسع من التي اعتدنا عليها؟ صاغ أهل العلم عبارات كثيرة لتمديد العامل، ومع ذلك فجل هذه الصيغ قد اندرس واختفى ولم ينل حظه من الشهرة والاستخدام، ولعل أقوى وأشهر صيغة شاعت في الوسط الرياضي هي ماتعرف بدالة غاما، فما هي دالة غاما وماهي صيغتها؟

1.2.1 دالة غاما

هي إحدى الدوال الخاصة ذات الأهمية الملحة في التطبيقات الرياضية ولعل أظهر ما تستخدم فيه هذه الدالة هو تمديد مفهوم العامل ليشمل الأعداد المركبة (يرمز لها بالحرف الاغريقي Γ) وهي المعرفة بالتكامل التالي [1]:

$$(1.1) \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in C$$

يكون هذا التكامل متقاربا من أجل $Re(z) > 0$.

بعض خواص دالة غاما

إن دالة غاما لها عدد كبير من الخواص لكننا سنقتصر هنا على أهم الخواص:

$$\Gamma(1) = 1 \cdot$$

البرهان:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \cdot$$

البرهان:

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(n + 1) = n! \cdot$$

البرهان:

لبرهنة هذه الخاصية سنستخدم البرهان بالتراجع:

من أجل $n = 1$ لدينا:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1!$$

نفرض صحتها من أجل $n = p$

$$\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p) = p!$$

بضرب المساواة في المقدار $p + 1$ نجد:

$$(p + 1)\Gamma(p + 1) = (p + 1)p!$$

$$\Gamma(p + 2) = (p + 1)!$$

أي أنها صحيحة من أجل $p + 1$ وهو المراد إثباته.

الآن بعد تمديد مفهوم العامل لا بد أن ننوه إلى أن تطور مفهوم التفاضل والتكامل الكسري قد شهد تعريفات وصيغ مختلفة أغلبها تسير في اتجاه واحد رغم اختلاف المنطق الابتدائي ومن هذه التعريفات نجد الصيغ التالية:

1.2.2 صيغة كوشي التكاملية

وهي الصيغة المعروفة بالتكامل التالي [1]:

$$(1.2) \quad D^n f(t) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(x)}{(x - t)^{n+1}} dx$$

نلاحظ أن المقدار $n \in N$ ، لذلك سنحتاج إلى تمديد هذا المقدار ليشمل مجموعة أوسع من الأعداد. من أجل التمديد إلى الرتب الكسرية يكفي أن نقوم بتمديد العامل في التعريف فقط أي:

$$n \rightarrow \alpha$$

أي أن:

$$n! \rightarrow \alpha! \rightarrow \Gamma(\alpha + 1)$$

فتصبح صيغة كوشي ذات الرتبة الكسرية معرفة بالشكل التالي:

$$(1.3) \quad D^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2\pi i} \oint_C \frac{f(x)}{(x - t)^{\alpha+1}} dx$$

حيث C هو المنحنى السلس الذي يحيط بالدالة التحليلية أحادية القيمة $f(t)$.

1.2.3 صيغة لاينكوف

نعلم أن تعريف الاشتقاق من جهة اليسار يعطى بالشكل التالي [1]:

$$(1.4) \quad D^1 f(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - h)}{h}$$

بالاشتقاق مرة أخرى نجد:

$$(1.5) \quad D^2 f(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - h) + f(t - 2h)}{h^2}$$

و بالاشتقاق مرة ثالثة نجد:

$$(1.6) \quad D^3 f(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t - h) + 3f(t - 2h) - f(t - 3h)}{h^3}$$

يمكننا أن نعمم النتيجة لتصبح:

$$(1.7) \quad D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f(t - kh)$$

حيث: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

من أجل $n \in R^+$ نعرف صيغة لا تينكوف بالشكل التالي:

$$(1.8) \quad {}_{t_0}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{t-t_0}{h}} (-1)^k C_n^k f(t - kh)$$

حيث: h : تمثل طول الخطوة.

ملاحظة

يمكننا أن نمدد هذا التعريف أكثر لأن التوفيقات تحتوي على العاملي، لكننا اكتفينا هنا بذكر إحدى الصيغ المشهورة في الوسط الرياضي.

1.2.4 التكامل الكسري

لنعتبر أن الشروط الابتدائية منعدمة عند اللحظة الابتدائية ولتكن $F(s)$ هي تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ ، لنضع:

$$(1.9) \quad D^{-1}f(t) = \int_0^t f(x)dx$$

$$(1.10) \quad D^{-2}f(t) = \int_0^t \int_0^\psi f(v)dv d\psi$$

بأخذ تحويل لابلاس نلاحظ أن:

$$(1.11) \quad \mathcal{L}\{D^{-1}f(t)\} = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{F(s)}{s}$$

من جهة أخرى نلاحظ أن:

$$(1.12) \quad \mathcal{L}\{D^{-2}f(t)\} = \mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^\psi f(v)dv d\psi\right] = \frac{F(s)}{s^2}$$

أي أنه:

$$(1.13) \quad \mathcal{L}\{D^{-n}f(t)\} = \frac{F(s)}{s^n}$$

و نعلم أن:

$$(1.14) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$(1.15) \quad D^{-n} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^n}\right] = f(t) * \left(\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\right) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$$

1.2.5 صيغة ريمان ليوفيل

وهي الصيغة المعروفة بالشكل التالي [2]:

$$(1.16) \quad {}_{t_0}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \alpha \in R^+$$

حيث تمثل t_0 الزمن الابتدائي والذي غالبا ما يكون معدوما، فنرمز حينئذ للصيغة بالرمز: ${}_{t_0}D_t^\alpha f(t)$.

1.2.6 صيغة كابوتو

يعرف مشتق كابوتو بالصيغة التالية: [2]:

$$(1.17) \quad {}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t f(\tau)^{(n)} (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau, n-1 < \alpha \leq n.$$

حيث أن n تمثل أول عدد صحيح أكبر من α .

نلاحظ أن تعريف كابوتو مقيد أكثر بسبب أنه يحتاج إلى المشتق من الرتبة n .

ملاحظة

يمكن أن نستخدم التكامل المزدوج في إثبات الصيغ السابقة.

بعد كل الذي شهدناه فيما سبق نكون قد اتحينا منتصف الطريق في بناء الآلة المعينة على وضع الأسس النظرية لدراسة الأنظمة ذات التأخير والآن بقي لنا أن نشرع في نشر جمل من خواص المصفوفات وجبرها ليكتمل لنا المشهد.

1.3 بعض خواص المصفوفات

في هذا القسم سنقوم بذكر بعض خواص المصفوفات [3] التي تلعب دورا أساسيا في دراسة استقرار الأنظمة ذات التأخر.

لنعتبر المصفوفة الحقيقية $A_{n \times n}$ ذات العناصر a_{ij} .

مصفوفة معرفة موجبة

نقول عن المصفوفة A بأنها مصفوفة معرفة موجبة إذا كان $x^T Ax > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$

مصفوفة معرفة شبه موجبة

نقول عن المصفوفة A بأنها مصفوفة معرفة شبه موجبة إذا كان $x^T Ax \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$

مصفوفة معرفة سالبة

نقول عن المصفوفة A بأنها مصفوفة معرفة سالبة إذا كان $x^T Ax < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$

مصفوفة معرفة شبه سالبة

نقول عن المصفوفة A بأنها مصفوفة معرفة شبه سالبة إذا كان $x^T Ax \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$

مصفوفة غير معرفة

نقول عن المصفوفة A بأنها غير معرفة إذا لم تحقق أي تعريف من التعاريف التي سبق ذكرها.

مُدور المصفوفة

إذا كانت $A_{n \times m} = [a_{ij}]$ فإن مُدور المصفوفة هي المصفوفة الناتجة من جعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف أي:

$$A_{m \times n} = [a_{ji}]$$

المصفوفة المتناظرة

هي تلك المصفوفة المربعة التي يتساوى فيها العناصر حول القطر، أو بشكل آخر هي تلك المصفوفة التي تساوي مُدورها أي

$$a_{ij} = a_{ji} \forall i, j \text{ وعلى هذا سيكون شرط التناظر هو: } (A = A^T)$$

المصفوفة المتناظرة بالسالب

هي تلك المصفوفة المربعة التي تحقق $(A = -A^T)$ وعلى هذا سيكون شرط التناظر بالسالب هو: $a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j$

لاحظ أن أي مصفوفة A يمكن أن تتكون من جزئين رئيسيين: جزء متناظر وجزء متناظر بالسالب.

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{symmetric}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{Skew-symmetric}} = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T) = A_1^T \text{ حيث}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T) = -A_2^T$$

يمكننا دراسة تعريفات المصفوفات من خلال النظر إلى جزئها المتناظر. نعلم أن الصيغ التربيعية (مثل صيغ الطاقة) تعتبر من المقادير السلبية أي:

$$(1.18) \quad E_{1 \times 1} = (x^T Ax) = (x^T Ax)^T = (x^T A^T x) \iff x^T (A_1 + A_2)x = x^T (A_1 + A_2)^T x \\ \iff x^T (A_1 + A_2)x = x^T (A_1^T + A_2^T)x \\ \iff x^T Ax = x^T A_1^T x + x^T A_2^T x$$

وبما أننا قررنا أن المعادلة $A = A_1 + A_2$ أي

$$E = x^T Ax = x^T A_1 x + x^T A_2 x = x^T A_1 x - x^T A_2 x \iff \begin{cases} E = x^T Ax = x^T A_1 x \\ x^T A_2 x = 0 \end{cases}$$

يمكننا أن ندرس تعريف المصفوفة من خلال النظر في الجزء المتناظر منها.

$$\text{حيث } x^T Ax = x^T \left(\frac{A+A^T}{2} \right) x = x^T A_s x$$

A_1 : الجزء المتناظر من المصفوفة A .

إذا كانت المصفوفة $A_{n \times n}$ متناظرة، فإن النظرية التالية تنص على بعض النتائج المتعلقة بربط التعريف بالقيم الذاتية.

1.3.1 نظرية

إذا كانت $A_{n \times n}$ مصفوفة متناظرة فإن التعريفات التالية محققة [3]:

- نقول عن المصفوفة A بأنها مصفوفة معرفة موجبة إذا كانت جميع قيمها الذاتية موجبة تماماً.
 - نقول عن المصفوفة A بأنها مصفوفة معرفة شبه موجبة إذا كانت جميع قيمها الذاتية غير سالبة.
 - نقول عن المصفوفة A بأنها مصفوفة معرفة سالبة إذا كانت جميع قيمها الذاتية سالبة تماماً.
 - نقول عن المصفوفة A بأنها مصفوفة معرفة شبه سالبة إذا كانت جميع قيمها الذاتية غير موجبة.
- والآن بعد أن ذكرنا ما تيسر من جبر المصفوفات سنتحول إلى ذكر بعض النظريات المهمة في علم التفاضل والتكامل التي سنحتاج إليها في بناء بعض التوطئات والبراهين الخاصة بتحليل الأنظمة ذات التأخر.

1.4 نظرية القيم المتوسطة

إذا كانت لدينا دالة f حقيقية مستمرة على المجال $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$ ، إذن يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $[a, b]$ حيث [4]:

$$(1.19) \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

1.5 توطئات

توطئة 1

لدينا من التفاضل والتكامل الخاص بالدوال متعددة المتغيرات التعريف التالي:

$$(1.20) \quad \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}$$

نضع:

$$(1.21) \quad I(x, t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx, \quad a(t) \text{ \& } b(t) < \infty$$

أي أن:

$$(1.22) \quad I(x, t + \Delta t) = \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx$$

باستخدام علاقة شال نجد:

$$(1.23) \quad I(x, t + \Delta t) = \int_{a(t+\Delta t)}^{a(t)} f(x, t + \Delta t) dx + \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t + \Delta t) dx + \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx$$

ب طرح العبارتين نجد:

$$(1.24) \quad I(x, t + \Delta t) - I(x, t) = \int_{a(t+\Delta t)}^{a(t)} f(x, t + \Delta t) dx + \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t + \Delta t) - f(x, t) dx + \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx$$

و بقسمة الأطراف على المقدار Δt وأخذ النهاية عند الصفر نجد:

$$(1.25) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(x, t + \Delta t) - I(x, t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{a(t+\Delta t)}^{a(t)} \frac{f(x, t + \Delta t)}{\Delta t} dx + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx + \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} \frac{f(x, t + \Delta t)}{\Delta t} dx$$

نعلم من نظرية القيم المتوسطة أن:

$$(1.26) \quad \frac{\int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx}{b(t + \Delta t) - b(t)} = f(c, t + \Delta t), \quad c \in]b(t), b(t + \Delta t)[$$

و بقسمة الأطراف على المقدار Δt وأخذ النهاية عند الصفر نجد:

$$(1.27) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} \frac{f(x, t + \Delta t)}{\Delta t} dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b(t + \Delta t) - b(t)}{\Delta t} f(c, t + \Delta t)$$

نعلم أن:

$$(1.28) \quad c \in]b(t), b(t + \Delta t)[$$

لما $\Delta t \rightarrow 0$ نجد أن:

$$c = b(t)$$

أي أن:

$$(1.29) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} \frac{f(x, t + \Delta t)}{\Delta t} dx = \frac{db(t)}{dt} f(b(t), t)$$

و بنفس الطريقة نجد:

$$(1.30) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} \frac{f(x, t + \Delta t)}{\Delta t} dx = \frac{da(t)}{dt} f(a(t), t)$$

أي أن:

$$(1.31) \quad \frac{d(I(x, t))}{dt} = \frac{db(t)}{dt} f(b(t), t) - \frac{da(t)}{dt} f(a(t), t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx$$

تسمى هذه النتيجة بصيغة لايبنتز التكاملية [5, 6].

توطئة 2

وهي تعميم لتراجحة شوارتز من أجل أي مصفوفة معرفة موجبة ومتناظرة $M \in R^{n \times n}$ ومن أجل أي مقدار قياسي $\gamma > 0$ ، إذا كان هناك دالة شعاعية w معرفة بالشكل التالي: $w : [0, \gamma] \rightarrow R^n$ بحيث أن التكاملين:

$$\int_0^\gamma w^T(s) M w(s) ds$$

$$\int_0^\gamma w^T(s) ds$$

معرّفين بشكل جيد فإن المتباينة التالية محققة [3, 7]:

$$(1.32) \quad \left(\int_0^\gamma w^T(s) ds \right) M \left(\int_0^\gamma w(s) ds \right) \leq \gamma \int_0^\gamma w^T(s) M w(s) ds$$

البرهان

لتكن $a, b, \lambda \in R$ وتكن الدالة $p(\lambda)$ المعرفة بالشكل التالي:

$$p(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx$$

حيث f و g دالتان حقيقتان مستمرتان على المجال $[a, b]$ أي:

$$= \int_a^b (\lambda^2 f(x)^2 + 2\lambda f(x)g(x) + g(x)^2) dx$$

بنشر العبارة وتبسيطها نجد:

$$= \int_a^b (\lambda^2 f(x)^2 dx + \int_a^b 2\lambda f(x)g(x) dx + \int_a^b g(x)^2 dx)$$

$$= \lambda^2 \int_a^b f(x)^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g(x)^2 dx$$

وهي صيغة تربيعية مشهورة.

بما أن $p(\lambda) \geq 0$ أي أن مميز هذه العبارة سالب إذن:

$$\Delta = (2 \int_a^b f(x)g(x) dx)^2 - 4(\int_a^b f(x)^2 dx)(\int_a^b g(x)^2 dx) \leq 0$$

أي:

$$(\int_a^b f(x)g(x) dx)^2 \leq (\int_a^b f(x)^2 dx)(\int_a^b g(x)^2 dx)$$

يكفي أن نضع $g(x) = 1$ لنحصل على المعادلة التي نريد برهنتها.
هذه الصيغة يمكن أن نمددها فتكون صالحة كذلك في فضاء المصفوفات.

توطئة 3

ليكن $x(t) \in R^n$ شعاعاً لدالة قابلة للاشتقاق، إذن من أجل أي $t_0 < t$ المتراجحة التالية محققة [8]:

$$(1.33) \quad \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (x^T(t) P x(t)) \leq x^T(t) P {}^C D_t^\alpha x(t)$$

حيث أن $P \in R^{n \times n}$ مصفوفة مربعة معرفة موجبة ومتناظرة كل عناصرها أعداد قياسية و $\alpha \in]0, 1[$.

توطئة 4

من أجل مشتق كابوتو، المساواة التالية محققة [9]:

$$(1.34) \quad \frac{d}{dt}(I^{1-\alpha}f(t)) = D^\alpha f(t), \quad \alpha \in]0, 1[$$

البرهان

باستخدام خواص التكامل الكسري المساواة التالية صحيحة:

$$\frac{d}{dt}(I^{1-\alpha}f(t)) = I^{-\alpha}f(t) = I^{-\alpha}I^1 f^{(1)}(t) = I^{1-\alpha}f^{(1)}(t)$$

الآن باستخدام خاصية مشتق كابوتو $I^{m-\alpha}(f^{(m)}(t)) = D^\alpha f(t)$

من أجل: $m = 1$ سنجد النتيجة.

الآن بعد إتمام البنية الرياضية يجب علينا أن نعرض على شيء من الأنظمة ذات التأخر وذلك لأنها فرع أساسي في دراستنا.

1.6 الأنظمة ذات التأخر

غالبا ما يظهر التأخير الزمني في العديد من مجالات الهندسة في العالم الواقعي إما على شكل تأخر في القياس أو في مدخلات الأنظمة أو في غير ذلك.

تظهر التأخيرات بشكل مكثف في أنظمة التحكم وفي الاتصالات خصوصا في تثبيت الأنظمة الشبكية، ومع ذلك يعتبر مصدرا من مصادر عدم الاستقرار بل أحيانا قد يؤثر وجوده في نقل النظام من حالة عدم الاستقرار إلى الاستقرار [10]، وبالتالي فإن دراسة هذا النوع من الأنظمة له أهمية نظرية وعملية وليست مجرد ترف علمي ومعرفي.

وكما هو الحال في الأنظمة غير المتأخرة، فإننا سنسلك نفس السبيل في التحليل اعتمادا على ما وضعه ليابونوف ثم صياغة النتيجة على شكل مترابطة مصفوفية خطية والتعامل معها على أساس مشكل تحسين لدالة محددة.

الآن بعد أن ذكرنا الأنظمة المتأخرة سنجد أن الواقع لا يتعامل بالمثالية المتخيلة في الذهن، وربما نمذجة هذا النوع من الأنظمة قد لا تكون شيئا سهلا في ظل عدم اليقين الذي نعيشه وقصور المفاهيم الرياضية عن وصف ما يتقدح في الذهن البشري، بل نلاحظ نوعا من الضبابية في الوصف، فما هي الضبابية حقا وهل لها قواعد رياضية أو منطقية متينة؟

1.7 المنطق الضبابي

يعتبر المنطق الضبابي مفهوما مهما جدا، لاسيما للمهتمين بمجال الذكاء الاصطناعي والتحكم، خصوصا في ظل عدم اليقين أو عندما لا يتم تحديد المفاهيم المعنية بدقة شديدة في استخدامنا اليومي، لذلك نحن غالبا مانعطي تعبيرات نفهمها نحن البشر ولكن إذا أردنا وضعها بشكل رياضي فسنرى أنها تفتقد إلى الصرامة الرياضية [11]، فعلى سبيل المثال إذا قلنا بأن اليوم حار، فبشكل ما نحن نفهم ما نقوله، ولكن ماذا نعني حقا بكلمة حار؟ هل نقصد بها 30 درجة مئوية؟ أم هل هي 35؟، لذلك نحن لانعطي هذا المعنى الدقيق لبيان معنى الحرارة عند محاولتنا لتقييم الوسط، وهكذا يتسرب هذا الاشكال إلى العديد من المفاهيم الأخرى كالطول والوزن والمسافة والذوق وغيرها من المفاهيم التي يقصر التعبير الرياضي فيها عن إدراك

مايقوم في الذهن من الأفكار والانطباعات والأحكام، بل أحيانا قد يصبح الأمر أكثر تعقيدا عندما نستخدم بعض الألفاظ المركبة مثل قولنا ساخن قليلا أو طويل جدا وهكذا، لكن عند رؤية هذه الألفاظ المركبة من منظور التحكم الآلي والذكاء الاصطناعي عموما فإننا نحتاج حقا أن نفهم مثل هذه الحقائق.

كان هذا هو التحدي الذي كان قائما حتى قدم الأستاذ لظفي زاده مفهوم المجموعات الضبابية ودرجة الانتمائية حيث صرنا نستطيع القول بأن العنصر X هو عضو في المجموعة A ودرجة انتمائه هي قيمة محصورة بين الصفر والواحد.

الآن بعد أن صرنا على دراية بما سنستخدمه في نمذجة الأنظمة المتأخرة سنحتاج إلى تعريف أهم خاصية في جميع الأنظمة ألا وهي الاستقرار، فما هي الاستقرار وما هو الغرض من دراستها؟

1.8 الاستقرار

تعتبر الاستقرار بلا شك أهم مفهوم في ميدان التحكم الآلي، فلا يمكن أن نتحدث عن الأداء إذا لم يكن النظام مستقرا، وهي في حقيقة أمرها راجعة إلى علم المعادلات التفاضلية، ويمكن أن نجعل مفهومها إجابة للسؤال التالي: كيف سيكون سلوك النظام إذا أفلح بجوار نقطة التوازن عندما يؤول الزمن إلى قيمة كبيرة جدا دون الحاجة إلى حساب الحل؟ من أوائل الذين تكلموا عن هذا المفهوم هو العالم الفرنسي لاغرونج حيث لاحظ أن الأنظمة الميكانيكية المحافظة تكون مستقرة عند نقاط التوازن للنظام غير المغذى إذا كانت الطاقة الكامنة للنظام أقل ما يمكن، وأنها تكون غير مستقرة إذا كانت الطاقة الكامنة عظمى، ثم جاء بعده العالم الروسي ألكساندر ليابونوف الذي اعتمد على نتائج أعمال لاغرونج وقام بتعميمها إلى جميع الأنظمة الديناميكية، وقام ببناء النظرية والمفهوم الحديث للاستقرار، ومن تأمل الكتب التي تهتم بالتحكم الآلي سيجد عدة تعريفات للاستقرار تختلف حسب نوعية النظام وحسب وجهة النظر نحو هذا المفهوم، لذلك نجد بعض التعاريف المشهورة التي يمكننا الوصل فيما بينها.

1.8.1 استقرار مدخلات محدودة-مخرجات محدودة

نعلم أن الاستجابة الكلية للنظام تتكون من استجابتين:

استجابة طبيعية: وهي التي تتعلق بالقيم الابتدائية للنظام.

استجابة قسرية: وهي التي تتعلق بمدخلات النظام أي:

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t)$$

حيث أن $y(t)$ هي الاستجابة الكلية و $y_n(t)$ هي الاستجابة الطبيعية و $y_f(t)$ هي الاستجابة القسرية

فإذا كان النظام يتكون من الاستجابة القسرية فقط، فإنه يمكن التحكم في الاستجابة الكلية مباشرة. $y(t) = y_f(t)$ لكننا

نعلم أن النظام يتكون من مجموع الاستجابتين.

نقول عن النظام الخطي غير المتغير مع الزمن أنه مستقر إذا اقتربت استجابته الطبيعية من الصفر مع مرور الوقت.

يكون النظام الخطي غير المتغير مع الزمن غير مستقر إذا كانت الاستجابة الطبيعية تؤول إلى مالانهاية عندما يؤول الزمن إلى مالانهاية [12].

يكون النظام الخطي غير المتغير مع الزمن مستقرا بشكل حرج إذا رأينا عدم تلاشي الاستجابة الطبيعية وعدم نموها، أي أنها تبقى ثابتة أو تتأرجح مع مرور الزمن.

من خلال هذه التعريفات نرى أننا اعتمدنا فقط على الاستجابة الطبيعية، لكن عند رؤيتنا للاستجابة الكلية سنرى جليا أنها مركبة من استجابتين فضلا عن صعوبة فصل الاستجابة الطبيعية عن القسرية. ومع ذلك فنحن ندرك بدهاءة أنه إذا تم تقييد المدخلات (مدخلات محدودة القيمة) ولم تكن الاستجابة الكلية محدودة فإن الاستجابة الطبيعية غير محدودة.

لكن إذا كان الإدخال غير محدود القيمة فإننا نرى أن الاستجابة الكلية غير محدودة القيمة ولا يمكننا الوصول إلى أي نتيجة حول استقرار النظام لأننا لا ندرى هل الاستجابة الإجمالية غير المحدودة كان سببها الاستجابة القسرية أم الطبيعية. لذلك كان لا بد علينا من إيجاد تعريف بديل للاستقرارية يحترم الاستجابة الإجمالية ويتضمن تعريفنا الأول حيث سنقوم باستنباط تعريف بديل لعدم الاستقرار بناء على الاستجابة الكلية للنظام بدلا من الاقتصار على الاستجابة الطبيعية فقط. يكون النظام مستقرا إذا كان كل مدخل محدود ينتج عنه مخرج محدود، ويكون النظام غير مستقر إذا كان أي مدخل محدود ينتج عنه مخرج غير محدود.

1.8.2 بعض نتائج أعمال ليابونوف

انبثقت عن أعمال ليابونوف في الاستقرارية طريقتان أساسيتان [13]:

الطريقة غير المباشرة

تعتمد أساسا على مفهوم التقريب المحلي بجوار نقاط التوازن، ثم تحليل النموذج الخطي ودراسة استقراره، ثم تمديد وتعميم النتائج إلى النظام غير الخطي.

الطريقة المباشرة

تتعامل مع النظام غير الخطي بشكل مباشر وذلك بالاعتماد على دالة خاصة شبيهة بدالة الطاقة الكامنة حيث يمكننا أن نعتبرها تعميما لها، وهنا الطاقة تعتبر مفهوما مجردا لا يشترط ارتباطه بالفيزياء أي أنها تكون موجبة تماما وتعدم عند التوازن فقط. ذكر ليابونوف أن النظام يكون مستقرا إذا فقد طاقته أو كان فقد هذه الطاقة ثابتا أي أن معدل تغير الطاقة يكون سالبا.

1.8.3 مفهوم ليابونوف للاستقرارية

لنعتبر النظام $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ذو نقطة التوازن $x(t) = x_e$ ، نقوم بتغيير المعلم لنجعل $x_e = 0$ حيث سنعتبرها النقطة المهمة الخاضعة للدراسة، إذا كانت لدينا أكثر من نقطة توازن في النظام غير الخطي فينئذ سنقوم بتحويل المعلم من أجل

كل نقطة توازن لتكون عند المبدأ.

مفهوم الاستقرار

نقول عن نقطة التوازن $x_e = 0$ أنها مستقرة بمفهوم ليابونوف إذا كان من أجل كل $\epsilon > 0$ ومن أجل $t_0 \in R^+$ يوجد $\delta > 0$ بحيث :

$$\|x(t_0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad t_0 \geq 0 \text{ و } \text{ماسوى ذلك فإن } x_e \text{ غير مستقرة.}$$

بشكل أعم إذا كانت نقطة التوازن المعبرة هي $x(t) = x_e$ ، إذن نقول عنها بأنها مستقرة بمفهوم ليابونوف إذا كان من أجل كل $\epsilon > 0$ ومن أجل $t_0 \in R^+$ يوجد $\delta > 0$ بحيث :

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon, \quad t_0 > 0 \text{ و } \text{ماسوى ذلك فإن } x_e \text{ غير مستقرة [13, 14].}$$

الاستقرار المقارب

نقول عن نقطة التوازن $x_e = 0$ أنها مستقرة بشكل مقارب بمفهوم ليابونوف إذا كانت [13]:

$$x_e = 0 \text{ مستقرة بمفهوم ليابونوف.}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

من المهم ملاحظة أن مفهوم الاستقرار المقارب لا يحدد طريقة التقارب (أسي، تربيعي، خطي)، وغالبا ما نحتاج الاستقرار الأسي لقوته.

الاستقرار الأسي

نقول عن نقطة التوازن $x_e = 0$ أنها مستقرة بشكل أسي إذا وجد عدنان حقيقيان موجبان α, λ بحيث [13]:

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \text{من أجل جميع قيم } \delta < \|x(t_0)\|$$

لاحظ أن المقدار $\alpha \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}$ سيتقارب نحو الصفر بشكل أسي، وعليه إذا كان مسار الحل $x(t)$ مستقرا بشكل أسي فإنه سيتقارب على الأقل بشكل أسرع من المقدار $\alpha \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}$

حيث أن λ يمثل معدل التقارب.

إن التقارب الأسي مهم جدا لاسيما في التطبيقات المتقدمة الخاصة بالتحكم لأنه يظهر صلابة النظام أمام الاضطرابات.

الاستقرار الشامل

نقول عن نقطة التوازن $x_e = 0$ أنها مستقرة شموليا بشكل مقارب إذا كانت $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ مهما كانت النقطة الابتدائية.

نقول عن نقطة التوازن $x_e = 0$ أنها مستقرة شموليا بشكل أسي إذا وجد هناك عدنان α, β موجبان بحيث [13]:

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \text{مهما كانت النقطة الابتدائية.}$$

1.9 خلاصة

إن دراسة نماذج الأنظمة الديناميكية بمعادلات تفاضلية ذات رتب كسرية يكشف لنا عن وجود بعض الأنظمة التي قد لا تكون مستقرة من تلقاء ذاتها، هذا وكما هو متقرر عند مهندسي التحكم الآلي فإن الأنظمة غير المستقرة غالبا ليست ذات أي فائدة من الناحية التطبيقية كما أن نقيض هذه القضية هو ذو مزية كبيرة جدا في تسهيل التعامل مع ما نجده في الواقع، لذلك كان لزاما علينا أن نجعل هذه الأنظمة غير المستقرة مستقرة ومن ثم تحسين أداؤها وهذا ما سنناقشه في الفصل التالي.

الفصل 2

دراسة الاستقرار

2.1 مقدمة

إن دراسة أي نظام تنقسم إلى جزئين رئيسيين هما:
الجزء الأول: التحليل وهو الجزء الذي ندرس فيه ماهية الأنظمة وخصائصها من استجابة واستقرارية وأداء وغير ذلك.
الجزء الثاني: التصميم وهو الجزء الخاص الذي نقوم فيه بتصميم المتحكمات.
ولعل أكبر مزية لاستخدام المتحكمات تكمن في شيئين رئيسيين هما التحكم في الاستقرارية والتحكم في الأداء، وبما أننا قرنا في الفصل السابق أنه قد لا يكون للأداء معنى معتبر إذا كان النظام غير مستقر فلا بد أن نركز جهدنا في محاولة تحسين الاستقرارية وذلك لأهميتها، لذلك سنقوم في هذا الفصل بدراسة تأثير استخدام بعض المتحكمات وسيكون في مقدمتهم متحكم بدون تأخر ثم يليه متحكم ذو تأخر ثم سنعرض مقترحنا الذي هو محاولة استخدام المتحكمين معا لإيجاد القيود والشروط الخاصة بالاستقرارية وتحسين أداء النظام، لكن هذا الاستخدام لا يمكن أن يكون متصور الحدوث إلا إذا كان لدينا نموذج للنظام الذي نرغب بدراسته، لذلك سنعطي النموذج الرياضي للنظام بهدف دراسته أولا ثم سنخرج على دراسة تأثير مختلف المتحكمات على استقرارية هذا النوع من الأنظمة.

2.2 نموذج النظام

لنعتبر النظام موضوع الدراسة غير الخطي ذو الرتبة الكسرية المقترن بتأخر والمعرف بالشكل التالي:

$$(2.1) \quad \begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = f(x(t), x(t - \tau(t)), u(t)), t \geq 0, \\ x(s) = \varphi(s), s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

حيث:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ يمثل شعاع الحالة

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ يمثل شعاع التحكم

$\tau(t)$ يمثل زمن التأخر والذي نعتبره متغيراً مع مرور الوقت ولتكن τ قيمة حدية علوية له أي: $0 \leq \tau(t) \leq \tau$
 نضع: $\frac{d}{dt}\tau(t) = \dot{\tau}(t)$ وليكن $0 \leq \dot{\tau}(t) \leq \mu$
 $\phi(s)$ هي الدالة الشعاعية الخاصة بالقيم الابتدائية على المجال $[-\tau, 0]$

هذا النظام يمكن أن نضع له نموذجاً ضبابياً من نوع تاكاجي سوجينو و بعدد r من القواعد من الشكل:

$$M = M_i \quad \text{فإن} \quad \theta(t) \in E_i \quad \text{إذا كان}$$

مع $\theta(t)$ المتغير المفترض، E_i مجموعات الانتماء الممكنة و M النموذج المعتمد من ضمن النماذج المحلية M_i .

فيصبح النظام منمذجا بالشكل التالي [15]:

$$(2.2) \quad \begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i u(t), \quad t \geq 0, \\ x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

حيث أن A_i, A_{di}, B_i مصفوفات حقيقية معلومة تحقق الأبعاد المناسبة للنظام.

بتعويض دوال الانتمائية ومجموعات الانتماء سنجد أن النموذج الضبابي النهائي للنظام صار مكتوباً من الشكل:

$$(2.3) \quad \begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i u(t)], \quad t \geq 0, \\ x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

حيث أن دالة الأوزان معرفة بالشكل التالي:

$$(2.4) \quad h_i(\theta(t)) = \frac{\prod_{l=1}^p M_{il}(\theta_l(t))}{\sum_{i=1}^r \prod_{l=1}^p M_{il}(\theta_l(t))}$$

و:

$$\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_p(t))$$

يمثل المقدار $M_{il}(\theta_l(t))$ درجة انتمائية $\theta_l(t)$ في M_{il} .

ومن أجل $t \geq 0$ الشروط التالية محققة:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) = 1 \\ h_i(\theta(t)) \geq 0 \end{cases}$$

الآن بعد أن قنا بنمذجة النظام سنقوم بمحاولة استخدام المتحكم غير ذي تأخر.

2.3 الاستقرار بمتحكم غير ذي تأخر

لنعتبر أن شعاع التحكم للنظام يكتب من الشكل التالي:

$$(2.6) \quad u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) K_i x(t)$$

حيث تمثل $K_i (i = 1, 2, \dots, r)$ مصفوفة الكسب الخاصة بالتغذية الراجعة.

الإشكالية الرئيسية التي سنقوم الآن بدراستها والتحقق منها هي إيجاد القيود التي يخضع لها هذا النوع من المتحكمات لجعل النظام غير الخطي المنمذج بطريقة تاكاجي سوجينو مستقرًا وذلك باستخدام التوطئات الأربع التي سبق لنا التعرض لها في الفصل الأول.

2.3.1 نظرية 1

من أجل مصفوفة كسب التحكم الخاصة بالتغذية الراجعة $K_j (j = 1, 2, \dots, r)$ و من أجل قيم μ و τ الخاصة بالنظام (2.1)، نقول عن النظام الضبابي (2.3) بأنه مستقر بشكل مقارب إذا وجدت مصفوفات ثابتة متناظرة و موجبة P, Q, R وأي مصفوفة N تحقق الأبعاد المطلوبة بحيث أن الشروط التالية محققة [9]:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \Omega_{ii} < 0, (i = 1, 2, \dots, r), \\ \Omega_{ij} + \Omega_{ji} < 0, i < j, i, j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

حيث أن:

$$(2.8) \quad \Omega_{ij} = \begin{bmatrix} PA_i + A_i^T P^T + PB_i K_j + K_j^T B_i^T P^T + Q & PA_{di} & A_i^T N^T + K_j^T B_i^T N^T & 0 \\ * & -(1 - \mu)Q & A_{di}^T N^T & 0 \\ * & * & \tau^2 R - N - N^T & 0 \\ * & * & * & -R \end{bmatrix}$$

2.3.2 البرهان

من أجل أي $t \geq 0$ نعتبر أن دالة ليابونوف تكتب من الشكل:

$$(2.9) \quad V(x_t) = I^{1-\alpha}(x^T(t)Px(t)) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds + \tau \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t {}^C D_t^\alpha x^T(s)R^C D_t^\alpha x(s)dsd\theta$$

حيث أن:

$$(2.10) \quad \begin{cases} x_t = x(t + \theta), \\ \theta \in] - \tau, 0] \end{cases}$$

P, Q, R مصفوفات متناظرة و موجبة.

باستخدام التوطئة الأولى والرابعة وبأخذ مشتق دالة لياونوف بالنسبة للزمن نجد:

$$(2.11) \quad \dot{V}(x_t) = \frac{dV(x_t)}{dt} = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{dV_1(x_t)}{dt} + \frac{dV_2(x_t)}{dt} + \frac{dV_3(x_t)}{dt}$$

حيث أن:

$$(2.12) \quad \begin{cases} V_1(x_t) = I^{1-\alpha}(x^T(t)Px(t)) \\ V_2(x_t) = \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds \\ V_3(x_t) = \tau \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t {}^C D_t^\alpha x^T(s)R^C D_t^\alpha x(s)dsd\theta \end{cases}$$

نضع $f(t) = x^T(t)Px(t)$ لنلاحظ أن:

$$T_1 = \frac{dV_1(x_t)}{dt} = \frac{d}{dt}(I^{1-\alpha}(f(t)))$$

باستخدام التوطئة الرابعة نجد:

$$T_1 = \frac{dV_1(x_t)}{dt} = I^{1-\alpha}(f^{(1)}(t)) = {}^C D_t^\alpha(f(t)) = {}^C D_t^\alpha(x^T(t)Px(t))$$

$$V_2(x_t) = \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds \quad \text{لدينا:}$$

بأخذ المشتق وبلاستعانة بصيغة لايبنتز التكاملية نجد:

$$(2.13) \quad \frac{d(I(x, t))}{dt} = \frac{db(t)}{dt}f(b(t), t) - \frac{da(t)}{dt}f(a(t), t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx$$

نضع:

$$(2.14) \quad \begin{cases} b(t) = t \rightarrow \frac{db(t)}{dt} = 1 \\ a(t) = t - \tau(t) \rightarrow \frac{da(t)}{dt} = 1 - \dot{\tau}(t) \\ f(t, x) = x^T(s)Qx(s) \rightarrow \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

بالتعويض سنجد أن:

$$\begin{aligned} T_2 = \frac{dV_2(x_t)}{dt} &= 0 + (1)[x^T(s)Qx(s)]_{s \rightarrow t} - (1 - \dot{\tau}(t))[x^T(s)Qx(s)]_{s \rightarrow t - \tau(t)} \\ &= x^T(t)Qx(t) - (1 - \dot{\tau}(t))x^T(t - \tau(t))Qx(t - \tau(t)) \end{aligned}$$

لدينا:

$$V_3(x_t) = \tau \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t {}^C D_t^\alpha x^T(s) R^C D_t^\alpha x(s) ds d\theta$$

و بالاشتقاق نجد:

$$\frac{dV_3(x_t)}{dt} = \tau \int_{-\tau}^0 \frac{d}{dt} \left(\int_{t+\theta}^t {}^C D_t^\alpha x^T(s) R^C D_t^\alpha x(s) ds d\theta \right)$$

باستخدام صيغة لايبنتز وبوضع:

$$(2.15) \quad \begin{cases} b(t) = t \rightarrow \frac{db(t)}{dt} = 1 \\ a(t) = t + \theta \rightarrow \frac{da(t)}{dt} = 1 \\ f(t, x) = {}^C D_t^\alpha x^T(s) R^C D_t^\alpha x(s) \rightarrow \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

نجد:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{t+\theta}^t {}^C D_t^\alpha x^T(s) R^C D_t^\alpha x(s) ds \right) = {}^C D_t^\alpha x^T(t) R^C D_t^\alpha x(t) - {}^C D_t^\alpha x^T(t + \theta) R^C D_t^\alpha x(t + \theta)$$

بالتعويض في عبارة $\frac{dV_3}{dt}$ نجد:

$$\begin{aligned} \frac{dV_3}{dt} &= \tau \int_{-\tau}^0 {}^C D_t^\alpha x^T(t) R^C D_t^\alpha x(t) d\theta - \tau \int_{-\tau}^0 {}^C D_t^\alpha x^T(t + \theta) R^C D_t^\alpha x(t + \theta) d\theta \\ &= \tau {}^C D_t^\alpha x^T(t) R^C D_t^\alpha x(t) - \tau \int_{-\tau}^0 {}^C D_t^\alpha x^T(t + \theta) R^C D_t^\alpha x(t + \theta) d\theta \end{aligned}$$

نضع:

$$(2.16) \quad \begin{cases} t + \theta = l \rightarrow \theta = l - t \rightarrow d\theta = dl \\ \theta = 0 \rightarrow l = t \\ \theta = -\tau \rightarrow l = t - \tau \end{cases}$$

فيصبح لدينا:

$$\frac{dV_3}{dt} = \tau^{2C} D_t^\alpha x^T(t) R^C D_t^\alpha x(t) - \tau \int_{t-\tau}^t {}^C D_t^\alpha x^T(l) R^C D_t^\alpha x(l) dl$$

بالتعويض في مشتق دالة ليابونوف نجد:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \dot{V}(x_t) = T_1 + T_2 + T_3 = & {}^C D_t^\alpha (x^T(t) P x(t)) + x^T(t) Q x(t) \\ & - (1 - \dot{\tau}(t)) x^T(t - \tau(t)) Q x(t - \tau(t)) + \tau^{2C} D_t^\alpha x^T(t) R^C D_t^\alpha x(t) \\ & - \tau \int_{t-\tau}^t {}^C D_t^\alpha x^T(s) R^C D_t^\alpha x(s) ds \end{aligned}$$

بما أنه لدينا مما سبق $\dot{\tau}(t) \leq \mu$ نجد:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \dot{V}(x_t) = T_1 + T_2 + T_3 \leq & {}^C D_t^\alpha (x^T(t) P x(t)) + x^T(t) Q x(t) \\ & - (1 - \mu) x^T(t - \tau(t)) Q x(t - \tau(t)) + \tau^{2C} D_t^\alpha x^T(t) R^C D_t^\alpha x(t) \\ & - \tau \int_{t-\tau}^t {}^C D_t^\alpha x^T(s) R^C D_t^\alpha x(s) ds \end{aligned}$$

لدينا من التوطئة الثالثة:

$$(2.19) \quad \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (x^T(t) P x(t)) \leq x^T(t) P_{t_0}^C D_t^\alpha x(t)$$

أي أن:

$$(2.20) \quad {}^C D_{t_0}^\alpha (x^T(t) P x(t)) \leq 2x^T(t) P_{t_0}^C D_t^\alpha x(t)$$

وبما أنه لدينا:

$$(2.21) \quad \left(\int_{t-\tau}^t {}^C D_{t_0}^\alpha x(t)^T ds \right) R \left(\int_{t-\tau}^t {}^C D_{t_0}^\alpha x(t) ds \right) \leq \tau \int_{t-\tau}^t {}^C D_{t_0}^\alpha x(t)^T R_{t_0}^C D_t^\alpha x(t) ds$$

بالتعويض في مشتق معادلة ليابونوف نجد:

$$(2.22) \quad \dot{V}(x) \leq 2(x^T(t)P^C D^\alpha x(t)) + x^T(t)Qx(t) - (1 - \mu)x^T(t - \tau(t))Qx(t - \tau(t)) \\ + \tau^{2C} D^\alpha x^T(t)R^C D^\alpha x(t) - \left(\int_{t-\tau}^t {}^C D^\alpha x^T(s)ds \right) R \left(\int_{t-\tau}^t {}^C D^\alpha x(s)ds \right).$$

بتعويض المعادلة 2.3 في 2.22 نجد:

$$(2.23) \quad \dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\theta(t))h_j(\theta(t))(2x^T(t)PA_i x(t) + 2x^T(t)PA_{di}x(t - \tau(t)) \\ + 2x^T(t)PB_i K_j x(t) + x^T(t)Qx(t) - (1 - \mu)x^T(t - \tau(t))Qx(t - \tau(t)) \\ + \tau^{2C} D^\alpha x^T(t) \times R^C D^\alpha x(t) - \left(\int_{t-\tau}^t {}^C D^\alpha x^T(s)ds \right) R \left(\int_{t-\tau}^t {}^C D^\alpha x(s)ds \right)$$

لتكن N مصفوفة كيفية تحقق الأبعاد المناسبة في عملية الضرب.
نعلم أن:

$$(2.24) \quad \begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t))[A_i x(t) + A_{di}x(t - \tau(t)) + B_i u(t)], t \geq 0, \\ x(s) = \varphi(s), s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

أي أن:

$$(2.25) \quad [(A + BK)x(t) + A_d x(t - \tau(t)) - {}^C D_t^\alpha x(t)] = 0$$

بضرب المساواة في المقدار $2^C D_t^\alpha x^T(t)N$ نجد:

$$(2.26) \quad 2^C D_t^\alpha x^T(t)N [(A + BK)x(t) + A_d x(t - \tau(t)) - {}^C D_t^\alpha x(t)] = 0$$

ببحث:

$$A = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t))A_i \\ A_d = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t))A_{di} \\ B = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t))B_i \\ K = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t))K_i$$

بجمع المعادلة الصفرية (2.26) مع المراجعة السابقة (2.23) نجد:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) \leq & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\theta(t))h_j(\theta(t)) \{2x^T(t)PA_i x(t) + 2x^T(t)PA_{di}x(t-\tau(t)) + 2x^T(t)PB_iK_j x(t) \\ & + x^T(t)Qx(t) - (1-\mu)x^T(t-\tau(t))Qx(t-\tau(t)) + \tau^{2C}D^\alpha x^T(t)R^C D^\alpha x(t) - \left(\int_{t-\tau}^t {}^C D^\alpha x^T(s)ds\right) \\ & \times R \left(\int_{t-\tau}^t {}^C D^\alpha x(s)ds\right) + 2^C D^z x^T(t)N((A_i + B_iK_j)x(t) + A_{di}x(t-\tau(t)) - {}^C D^\alpha x(t))\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

وهذه الأخيرة يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$\dot{V}(x_t) \leq A^T M A \quad (2.28)$$

بحيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \\ D^\alpha x(t) \\ \int_{t-\tau}^t D^\alpha x(s)ds \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} PA_i + A_i^T P^T + PB_iK_j + K_j^T B_i^T P^T + Q & PA_{di} & A_i^T N^T + K_j^T B_i^T N^T & 0 \\ * & -(1-\mu)Q & A_{di}^T N^T & 0 \\ * & * & \tau^2 R - N - N^T & 0 \\ * & * & * & -R \end{bmatrix}$$

مما يستلزم عنه:

$$\dot{V}(t) \leq 0 \rightarrow M \leq 0 \quad (2.29)$$

و بما أن $h_i(\theta(t)) \geq 0$ فإننا نقول عن النظام بأنه مستقر شمولياً بشكل مقارب إذا تحققت الشروط الخاصة بالاستقرار المعطاة في المعادلة (2.7).

ملاحظة 1

نظراً للتعقيد الشديد الذي نشهده عند دراسة هذا النوع من الأنظمة، فإننا نلجأ لاستخدام بعض الحيل الرياضية التي تبسط الحل وتعتبر المأخوذة الثالثة من أبرز الحيل المستخدمة مع هذا النوع من الأنظمة.

ملاحظة 2

قام عدد كبير جداً من الباحثين بدراسة مشكلة الاستقرار للأنظمة ذات الرتب الصحيحة، لكن المشكل أن أبحاثهم كانت مقتصرة على ذلك النوع من الأنظمة فقط ولا يمكن تمديدها، لذلك كان لزاماً علينا إيجاد هذه الصيغة المعدلة من

دالة ليابونوف.

نظرا لصعوبة التعامل مع النتيجة التي تحصلنا عليها في هذه النظرية سنحاول استخدام حيلة من الحيل لتغيير شكل المصفوفة إلى شكل آخريسهل التعامل معه ويسهل التعديل عليه خصوصا عند تركيب مختلف أنواع المتحكمات، لذلك لابد من النظرية الثانية.

2.3.3 نظرية 2

من أجل قيم μ و τ الخاصة بالنظام (2.1)، نقول عن النظام الضبابي (2.3) بأنه مستقر بشكل مقارب إذا وجدت مصفوفات متناظرة وموجبة X, \bar{Q}, \bar{R} وأي مصفوفة $Y_j (j = 1, 2, \dots, r)$ تحقق الأبعاد المطلوبة بحيث أن شروط LMI التالية محققة [9]:

$$(2.30) \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ \bar{\Omega}_{ij} + \bar{\Omega}_{ji} < 0, \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

حيث أن:

$$\bar{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + X^T A_i^T + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + \bar{Q} & A_{di} X & \epsilon X^T A_i^T + \epsilon Y_j^T B_i^T & 0 \\ * & (1 - \mu) \bar{Q} & \epsilon X^T A_{di}^T & 0 \\ * & * & \tau^2 \bar{R} - \epsilon X - \epsilon X^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{R} \end{bmatrix}$$

$K_j = Y_j X^{-1}$

2.3.4 البرهان

لبرهنة هذه النظرية سنستخدم النتيجة السابقة. نفرض أن P مصفوفة غير شاذة وليكن $N = \epsilon P, X = P^{-1}$ بضرب المتراجحة $M < 0$ في المصفوفة $J = \text{diag}(X, X, X, X)_{4 \times 4}$ مع منقولها على التوالي. لتكن:

$$J = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ * & X & 0 & 0 \\ * & * & X & 0 \\ * & * & * & X \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$J^T M J = \begin{bmatrix} A_i X + X^T A_i^T + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + X^T Q X & A_{di} X & \epsilon X^T A_i^T + \epsilon Y_j^T B_i^T & 0 \\ * & (1 - \mu) X^T Q X & \epsilon X^T A_{di}^T & 0 \\ * & * & \tau^2 - X^T R X - \epsilon X - \epsilon X^T & 0 \\ * & * & * & -X^T R X \end{bmatrix}$$

بوضع $\bar{Q} = X^T Q X$, $\bar{R} = X^T R X$, $K_j = Y_j X^{-1} X$ نجد:

$$\bar{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + X^T A_i^T + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + \bar{Q} & A_{di} X & \epsilon X^T A_i^T + \epsilon Y_j^T B_i^T & 0 \\ * & (1 - \mu) \bar{Q} & \epsilon X^T A_{di}^T & 0 \\ * & * & \tau^2 \bar{R} - \epsilon X - \epsilon X^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{R} \end{bmatrix}$$

وهو ما نريد إثباته.

2.4 الاستقرار بمتحكم ذو تأخر

في هذا الجزء سنجرب استخدام نوع جديد من المتحكمات ألا هو المتحكم ذو التأخر والذي سنستخدمه في تركيبتنا المقترحة بغرض تحسين أداء النظام.
لتكن:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [K_{di} x(t - \tau(t))]$$

حيث: K_{di} ($i = 1, 2, \dots, r$) تمثل مصفوفة الكسب الخاصة بالتغذية الراجعة ذات التأخر.

2.4.1 نظرية 3

من أجل قيم μ و τ الخاصة بالنظام (2.1)، نقول عن النظام (2.3) الضبابي بأنه مستقر بشكل مقارب إذا وجدت مصفوفات معرفة موجبة X, \bar{Q}, \bar{R} وأي مصفوفة Y_{dj} ($j = 1, 2, \dots, r$) تحقق الأبعاد المطلوبة بحيث أن شروط *LMI* التالية محققة:

$$(2.31) \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ \bar{\Omega}_{ij} + \bar{\Omega}_{ji} < 0, \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

حيث أن:

$$\bar{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + X^T A_i^T + \bar{Q} & A_{di} X + B_i Y_{dj} & \epsilon X^T A_i^T & 0 \\ * & (1 - \mu) \bar{Q} & \epsilon X^T A_{di}^T + \epsilon Y_{dj}^T B_i^T & 0 \\ * & * & \tau^2 \bar{R} - \epsilon X - \epsilon X^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{R} \end{bmatrix}$$

$$K_{dj} = Y_{dj}X^{-1} (j = 1, \dots, r) \text{ و}$$

2.4.2 البرهان

لبرهنة هذه النظرية يكفي أن نستخدم النتيجة السابقة، فلو تأملنا في تركيبة هذا المتحكم وكيفية تأثيره على النظام (2.3) لظهر جليا أن البرهان سيكون بتمديد مصفوفة حالة التأخر $A_{di} \rightarrow A_{di} + B_i K_{dj}$ ونقوم بإلغاء المصفوفة Y_j .

لاحظ أن:

$$(2.32) \quad \begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i u(t), & t \geq 0, \\ x(s) = \varphi(s), & s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

إذا وضعنا:

$$(2.33) \quad u(t) = K_{di} x(t - \tau(t))$$

يصبح النظام بالشكل التالي:

$$(2.34) \quad \begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = A_i x(t) + (A_{di} + B_i K_{di}) x(t - \tau(t)), & t \geq 0 \\ x(s) = \phi(s), & s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

وإذا وضعنا $\bar{A}_{di} = A_{di} + B_i K_{di}$ يصبح النظام معطى على الشكل:

$$(2.35) \quad \begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = A_i x(t) + (\bar{A}_{di}) x(t - \tau(t)), & t \geq 0 \\ x(s) = \phi(s), & s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

قد تم في الفصل السابق إيجاد شروط الاستقرار للأنظمة المكتوبة بمثل هذه الصيغة وقد وجدنا:

$$(2.36) \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_{ii} < 0, & i = 1, 2, \dots, r \\ \bar{\Omega}_{ij} + \bar{\Omega}_{ji} < 0, & i < j, i, j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

$$\bar{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + X^T A_i^T + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + \bar{Q} & \bar{A}_{di} X & \epsilon X^T A_i^T + \epsilon Y_j^T B_i^T & 0 \\ * & (1 - \mu) \bar{Q} & \epsilon X^T \bar{A}_{di}^T & 0 \\ * & * & \tau^2 \bar{R} - \epsilon X - \epsilon X^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{R} \end{bmatrix} \text{ حيث:}$$

$$K_j = Y_j X^{-1} \text{ و}$$

يكفي أن نعوض: $\bar{A}_{di} = A_{di} + B_i K_{di}$ في المصفوفة ونقوم بإلغاء Y_j لنحصل على:

$$\bar{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + X^T A_i^T + \bar{Q} & A_{di} X + B_i Y_{dj} & \epsilon X^T A_i^T & 0 \\ * & (1 - \mu) \bar{Q} & \epsilon X^T A_{di}^T + \epsilon Y_{di}^T B_i^T & 0 \\ * & * & \tau^2 \bar{R} - \epsilon X - \epsilon X^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{R} \end{bmatrix}$$

2.5 الاستقرار بالمتحكم المقترح

بعد أن استعرضنا التحليل الجانبي النظري لكلا المتحكمين غير ذي تأخر و ذو تأخر وما يميز كل واحد من إيجابيات، فإننا نقترح في هذا الجزء دمج المتحكمين معاً لأجل الحصول على مزايا كليهما في نظام واحد. أي أن المتحكم غير ذي تأخر سيكون أساس العمل لضمان استقرار النظام ككل وأما المتحكم الثاني فسيعمل على تحسين أداء النظام. لأجل ذلك لتكن:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [K_i x(t) + K_{di} x(t - \tau(t))]$$

حيث K_i مصفوفة الكسب الخاصة بالتغذية الراجعة و K_{di} ($i = 1, 2, \dots, r$) مصفوفة الكسب الخاصة بالتغذية الراجعة ذات التأخر.

2.5.1 نظرية 4

من أجل قيم μ و τ الخاصة بالنظام (2.1) نقول عن النظام الضبابي (2.3) بأنه مستقر بشكل مقارب إذا وجدت مصفوفات معرفة موجبة X, \bar{Q}, \bar{R} وأي مصفوفتين Y_j ($j = 1, 2, \dots, r$), Y_{dj} ($j = 1, 2, \dots, r$) تحققان الأبعاد المطلوبة بحيث أن شروط LMI التالية محققة:

$$(2.37) \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ \bar{\Omega}_{ij} + \bar{\Omega}_{ji} < 0, \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

حيث أن:

$$\bar{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + X^T A_i^T + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + \bar{Q} & A_{di} X + B_i Y_{dj} & \epsilon X^T A_i^T + \epsilon Y_j^T B_i^T & 0 \\ * & (1 - \mu) \bar{Q} & \epsilon X^T A_{di}^T + \epsilon Y_{di}^T B_i^T & 0 \\ * & * & \tau^2 \bar{R} - \epsilon X - \epsilon X^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{R} \end{bmatrix}$$

$$K_{dj} = Y_{dj} X^{-1} \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad \text{و} \quad K_j = Y_j X^{-1}$$

2.5.2 البرهان

لبرهنة هذه النظرية يكفي أن نستخدم النتيجة الأولى، فلو تأملنا في تركيبة هذا المتحكم وكيفية تأثيره على النظام (2.3) لظهر جليا أن البرهان سيكون بتمديد مصفوفة حالة التأخر $A_{di} \rightarrow A_{di} + B_i K_{dj}$ لأجل ذلك لدينا:

$$(2.38) \quad \begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i u(t), & t \geq 0, \\ x(s) = \varphi(s), & s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

إذا وضعنا:

$$(2.39) \quad u(t) = K_i x(t) + K_{di} x(t - \tau(t))$$

يكتب النظام بالشكل التالي:

$$(2.40) \quad \begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = (A_i + B_i K_i) x(t) + (A_{di} + B_i K_{di}) x(t - \tau(t)), & t \geq 0 \\ x(s) = \phi(s), & s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

وإذا وضعنا: $\bar{A}_{di} = A_{di} + B_i K_{di}$ يصبح النظام:

$$(2.41) \quad \begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = (A_i + B_i K_i) x(t) + (\bar{A}_{di}) x(t - \tau(t)), & t \geq 0 \\ x(s) = \phi(s), & s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

وقد تم في الفصل الأسبق إيجاد شروط الاستقرارية للأنظمة المكتوبة بمثل هذه الصيغة على النحو التالي:

$$(2.42) \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_{ii} < 0, & i = 1, 2, \dots, r \\ \bar{\Omega}_{ij} + \bar{\Omega}_{ji} < 0, & i < j, i, j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

حيث:

$$\bar{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + X^T A_i^T + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + \bar{Q} & \bar{A}_{di} X & \epsilon X^T A_i^T + \epsilon Y_j^T B_i^T & 0 \\ * & (1 - \mu) \bar{Q} & \epsilon X^T \bar{A}_{di}^T & 0 \\ * & * & \tau^2 \bar{R} - \epsilon X - \epsilon X^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{R} \end{bmatrix}$$

$$K_{dj} = Y_{dj} X^{-1} (j = 1, 2, \dots, r) \text{ و } K_j = Y_j X^{-1}$$

الآن يكفي أن نعوض: $\bar{A}_{di} = A_{di} + B_i K_{di}$ في المصفوفة لنحصل على:

$$\bar{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + X^T A_i^T + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + \bar{Q} & A_{di} X + B_i Y_{dj} & \epsilon X^T A_i^T + \epsilon Y_j^T B_i^T & 0 \\ * & (1 - \mu) \bar{Q} & \epsilon X^T A_{di}^T + \epsilon Y_{dj}^T B_i^T & 0 \\ * & * & \tau^2 \bar{R} - \epsilon X - \epsilon X^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{R} \end{bmatrix}$$

2.6 خلاصة

لقد استعرضنا في هذا الفصل بعض النتائج التي تحصلنا عليها من خلال دراستنا حول تأثير بعض أنواع المتحكمات على استقرارية النظام موضوع الدراسة. لقد قمنا أولاً باستخدام متحكم غير ذي تأخر ودراسة شروط الاستقرار التي وجدنا أنها شبيهة جداً بالأنظمة غير الخطية العادية مع وجود بعض الاختلافات في طريقة استنباط نتائج كل منهما ثم عرجنا بعدها على متحكم ذي تأخر صرف والذي سنستخدمه في تحسين أداء النظام ومن ثم قمنا عرضنا مقترحنا باستخدام المتحكمين معا ودراسة تأثير التركيبة المقترحة على الاستقرار وعلى أداء النظام ككل. لكن النتائج المتحصل عليها نظريا قد لا تكون واضحة تماماً إلا إذا تم القيام بحاكاة لتجربتها على نموذج لنظام ما كالعنفات المائية مثلا، وهذا ماسنبرزه في الفصل التالي.

الفصل 3

المحاكاة على نموذج عنفة مائية

3.1 مقدمة

بما أننا قرنا فيما سبق أن نتائج دراسة تأثير المتحكمات على الاستقرار وغيرها قد لا تكون واضحة تماما إلا إذا تم القيام بمحاكاة لتجربتها على نموذج لنظام ما كالعنفات المائية مثلا وذلك لتبسيط فهم المعادلات الرياضية وتقريبها للواقع. سنحاول في هذا الفصل استعراض نموذج لعنفة مائية وتجربة المتحكمات التي قمنا بدراستها وعرض النتائج المتحصل عليها وتحليلها.

3.2 وصف نظام العنفة المائية

إن النموذج الديناميكي لعنفة مائية ذات تأخر ميكانيكي يعطى بجملة المعادلات التفاضلية اللاخطية التالية [16]:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \dot{\delta} = \omega_0 \omega \\ \dot{\omega} = \frac{1}{T_{ab}} [m_t - D\omega - \frac{E_q V_s}{\hat{x}_d \Sigma} \sin(\delta) - \frac{V_s^2}{2} \frac{\hat{x}_d \Sigma - x_q \Sigma}{\hat{x}_d \Sigma x_q \Sigma} \sin(2\delta)] \\ \dot{m}_t = \frac{1}{e_{qh} T_w} [-m_t + e_y y - \frac{e e_y T_w}{T_y} (u - y)] \\ {}^C D_t^\alpha y = \frac{1}{T_y} (u - y) \end{cases}$$

حيث:

δ : انحراف زاوية دوران العضو الدوار في المولد

ω : انحراف السرعة الدورانية النسبية للمولد

m_t : انحراف عزم الدوران التدريجي لإخراج العنفة المائية

y : انحراف التغير التدريجي لفتحة السدادة القادرة

T_{ab} : ثابت زمن العزم العام للوحدة

T_w : ثابت زمن العزم للماء المتدفق

T_y : ثابت زمن استجابة المحرك الموازر

D : معامل تقليل انحراف السرعة

\dot{E}_q : القوة الكهرومحرركة العابرة لمحور q للمولد

\dot{x}_d : المعاوقات العابرة لمحور d في الوضعية المؤقتة

x_q : المعاوقات العابرة لمحور q في الوضعية المؤقتة

V_s : جهد الباص

e_{qh} : معامل نقل الارتفاع

e_y : معامل نقل السكته للمرحل

e : معامل التعديل الذاتي لمجموعة مولدات الطاقة الهيدروكهربائية

لتكن $u = 0$ و نعتبر وجود تأخير زمني ناتج عن القصور الذاتي الميكانيكي للنظام، لذلك ستصبح:

$$\dot{y} = -\frac{1}{T_y}y(t - \tau(t))$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} \dot{\delta} = \omega_0\omega \\ \dot{\omega} = \frac{1}{T_{ab}}[m_t - D\omega - \frac{E_q V_s}{\dot{x}_d} \sin(\delta) - \frac{V_s^2}{2} \frac{\dot{x}_d \Sigma - x_q \Sigma}{\dot{x}_d \Sigma x_q \Sigma} \sin(2\delta)] \\ \dot{m}_t = \frac{1}{e_{qh} T_w}[-m_t + e_y y(t - \tau(t)) + \frac{e e_y T_w}{T_y} y(t - \tau(t))] \\ {}^C D_t^\alpha y = -\frac{1}{T_y} y(t - \tau(t)) \end{cases}$$

3.3 النموذج الضبابي للعنفة المائية

كما قد تكلمنا في الفصل السابق عن أهمية النمذجة الضبابية من نوع تاكاجي سوجينو للأنظمة ذات التأخر بعدد معين من القواعد التي تحدد العلاقة بين مدخلات ومخرجات النظام بالشكل التالي:

القاعدة i : إذا كانت $\zeta_1(t)$ هي M_{i1} وإذا كانت $\zeta_p(t)$ هي M_{ip} فإن النظام سيكون منمذجا بالشكل التالي:

$$(3.3) \quad \begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i u(t), t \geq 0, \\ x(s) = \varphi(s), s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

حيث تمثل $M_{ij} (j = 1, 2, \dots)$ المجموعة الضبابية

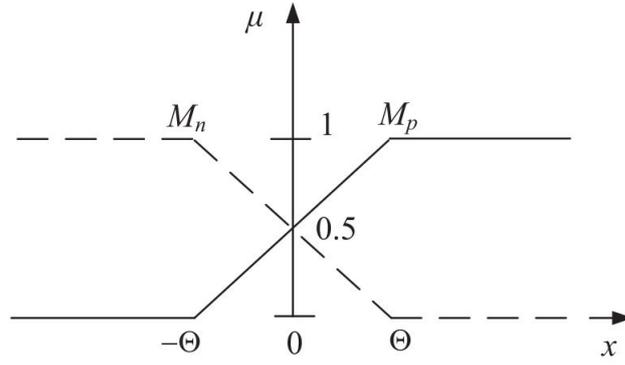
$x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ تمثل شعاع الحالة

$\tau(t)$ تمثل مقدار التأخر والذي نعتبره متغيرا

A_i, A_{di}, B_i تمثل مصنفات معلومة ثابتة خاصة بالنظام المنمذج وتحقق الأبعاد المناسبة.

$\phi(t)$ هي دالة الشروط الابتدائية والتي نعتبرها هنا مستمرة على المجال $[-\tau, 0]$

$\zeta(t)$ متغير الفرضية



شكل 3.1: دالتي الانتماء

إن دوال الانتماء الضبابية يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$(3.4) \quad M_p \begin{cases} 0, & x < -\theta \\ \frac{x+\theta}{2\theta}, & -\theta \leq x \leq \theta \\ 1, & x > \theta \end{cases}$$

$$(3.5) \quad M_n \begin{cases} 1, & x < -\theta \\ \frac{-x+\theta}{2\theta}, & -\theta \leq x \leq \theta \\ 0, & x > \theta \end{cases}$$

ومنه النموذج الكلي للنظام يمكن كتابته من الشكل التالي:

$$\dot{x}(t) = A_s x(t) + A_{sd} x(t - \tau(t)) + B_s u(t)$$

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T = [\delta(t) \ \omega(t) \ m_t(t) \ y(t)]^T$$

حيث أن:

$$B_s = \sum_{i=1}^r h_i(\zeta(t)) B_i, A_{sd} = \sum_{i=1}^r h_i(\zeta(t)) A_{id}, A_s = \sum_{i=1}^r h_i(\zeta(t)) A_i$$

و:

$$h_i(\zeta(t)) = \frac{w_i(\zeta(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t))}$$

$$w_i(\zeta(t)) = \prod_{j=1}^r M_{ij}(\zeta(t))$$

$$h_i(\zeta(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(\zeta(t)) = 1$$

لنعتبر أن حركة العنفة المائية دائماً تتغير ضمن نطاق معين وليكن δ حيث: $\delta \in [-\theta, \theta]$, $\theta = 2$. نضع: $M_p = M_{11}$, $M_n = M_{21}$ فإن: القاعدة الأولى: إذا كان x_1 هو M_{11} فإن:

$$(3.6) \quad \begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = A_1 x(t) + A_{1d} x(t - \tau(t)) + B_1 u(t), \quad t \geq 0, \\ x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

القاعدة الثانية: إذا كان x_1 هو M_{21} فإن:

$$(3.7) \quad \begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = A_2 x(t) + A_{2d} x(t - \tau(t)) + B_2 u(t), \quad t \geq 0, \\ x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

لنعتبر أن دوال الانتمائية الخاصة بالنظام مكتوبة من الشكل:

$$M_{11}(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_1(t)}{\theta} \right)$$

$$M_{21}(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_1(t)}{\theta} \right)$$

مع قيم متغيرات النظام المعطاة بالجدول 3.1:

e_y	e_{qh}	e	V_s	$\dot{x}_q \Sigma$	$\dot{x}_d \Sigma$	\dot{E}_q	D	T_y	T_w	T_{ab}	ω_0	المتغير
1	0.5	0.7	1	0.474	1.25	1.35	2	0.1	0.8	9	314	القيمة

جدول 3.1: قيم متغيرات النظام

نجد:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 314 & 0 & 0 \\ \frac{1577}{16951} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 314 & 0 & 0 \\ \frac{17231}{16951} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{2d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, A_{1d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

باستخدام قواعد المنطق الضبابي سنجد أن النظام صار مكتوبا من الشكل:

$$(3.8) \quad \begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(\theta(t)) [A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i u(t)], t \geq 0, \\ x(s) = \varphi(s), s \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

3.4 نتائج المحاكاة

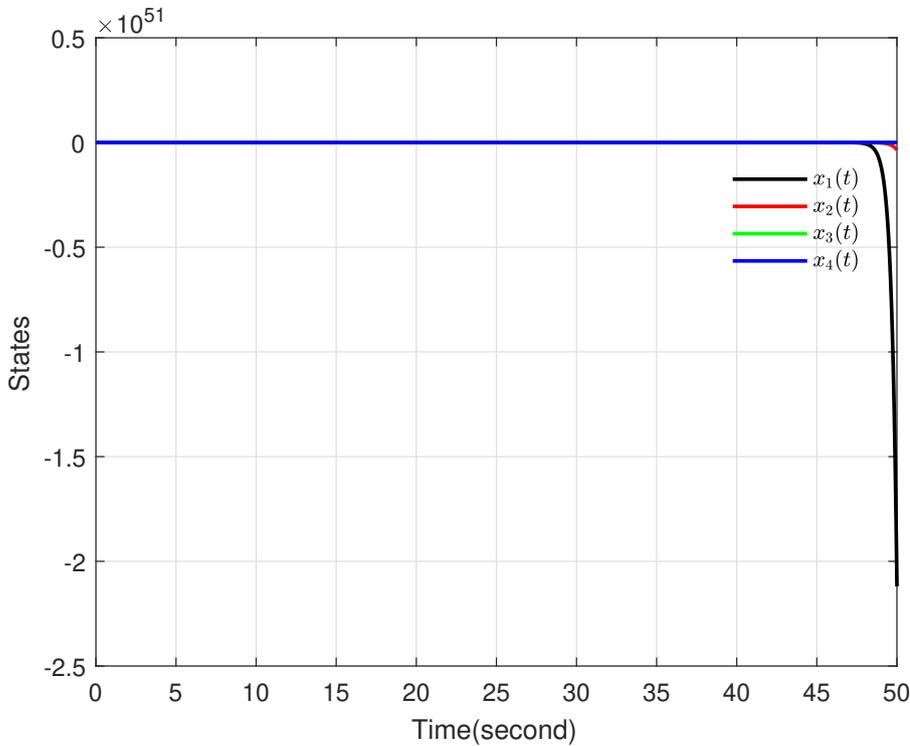
نعرض في هذا الجزء مختلف نتائج المحاكاة المتحصل عليها بغرض تأكيد المعطيات النظرية المعروضة سابقا لكلا المتحكمين وكذا تأكيد الفائدة من مقترحنا في دمج المتحكمين في نظام واحد. القيم المستخدمة في هاته المحاكاة هي:

$$\alpha = 0.9, \mu = 0.26, \tau = 5, \tau(t) = 0.1 \sin(2.6t) + 4.99$$

وقد تحصلنا على قيم مصفوفات التحكم بالاستعانة ببرنامج ماتلاب وكانت النتائج كالتالي:

3.4.1 أداء النظام بدون متحكم

ابتداء دعنا نلقي نظرة على أداء النظام بدون متحكم أو في حالة حلقة مفتوحة. في هاته الحالة استجابة النظام معطاة بالشكل 3.2.

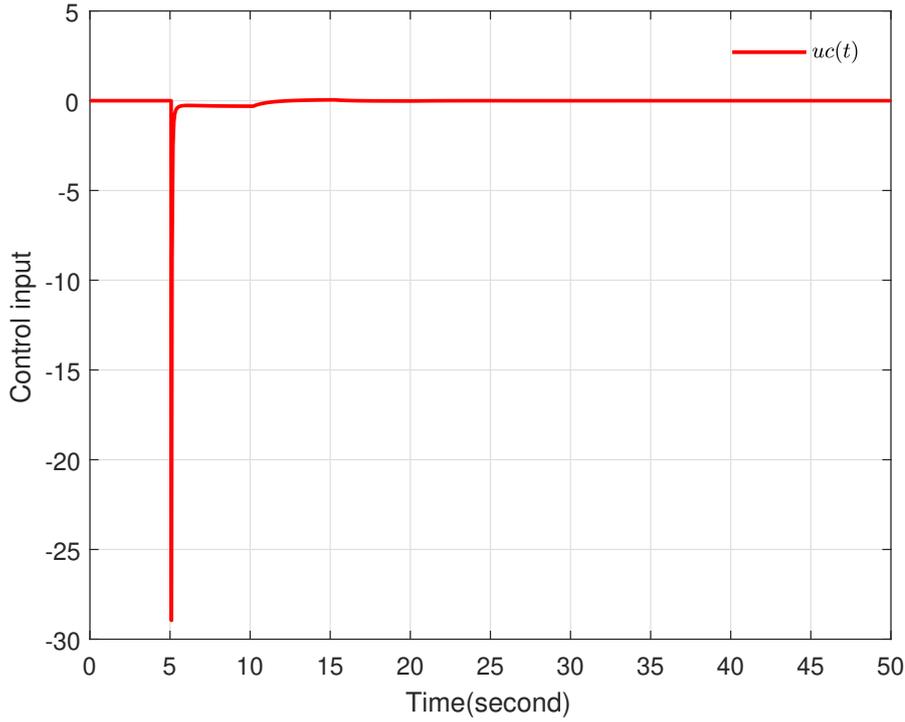


شكل 3.2: حالات النظام بدون استخدام المتحكم

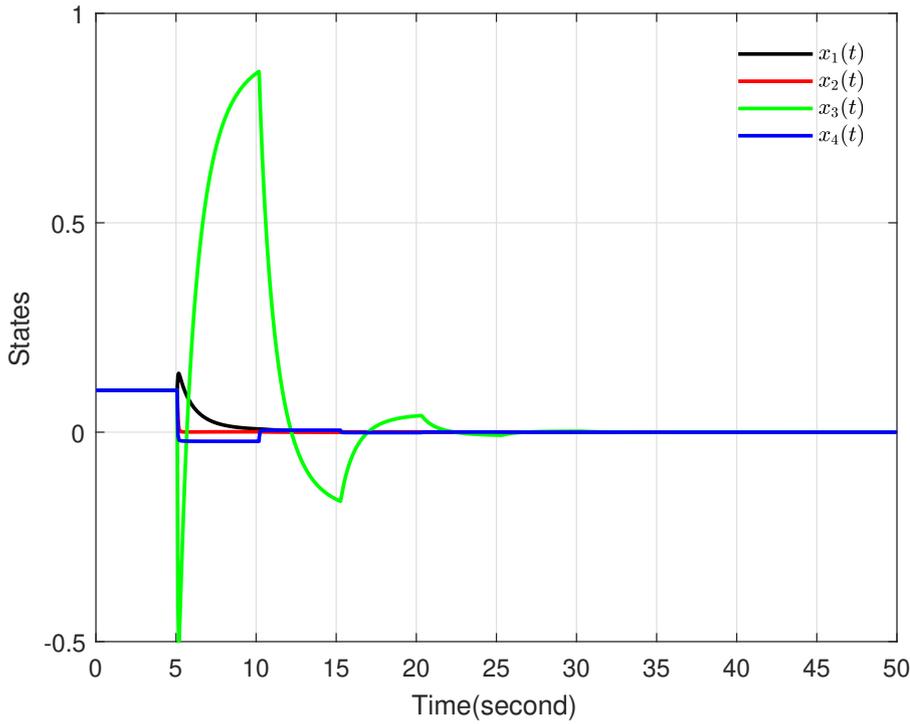
من خلال الشكل 3.2 الذي يمثل ديناميكية حالات النظام وتغيرها بدلالة الزمن نلاحظ أن النظام يتوجه نحو الانفجار وبالتالي هو غير مستقر بانعدام المتحكم. لذلك من الضروري استخدام متحكم لغرض ضمان استقرار النظام.

3.4.2 أداء النظام بمتحكم غير ذي تأخر

بعد استخدامنا للمتحكم غير ذي تأخر تحصلنا على النتائج المعطاة بالشكلين 3.3، 3.4.



شكل 3.3: إشارة المتحكم غير ذي تأخر

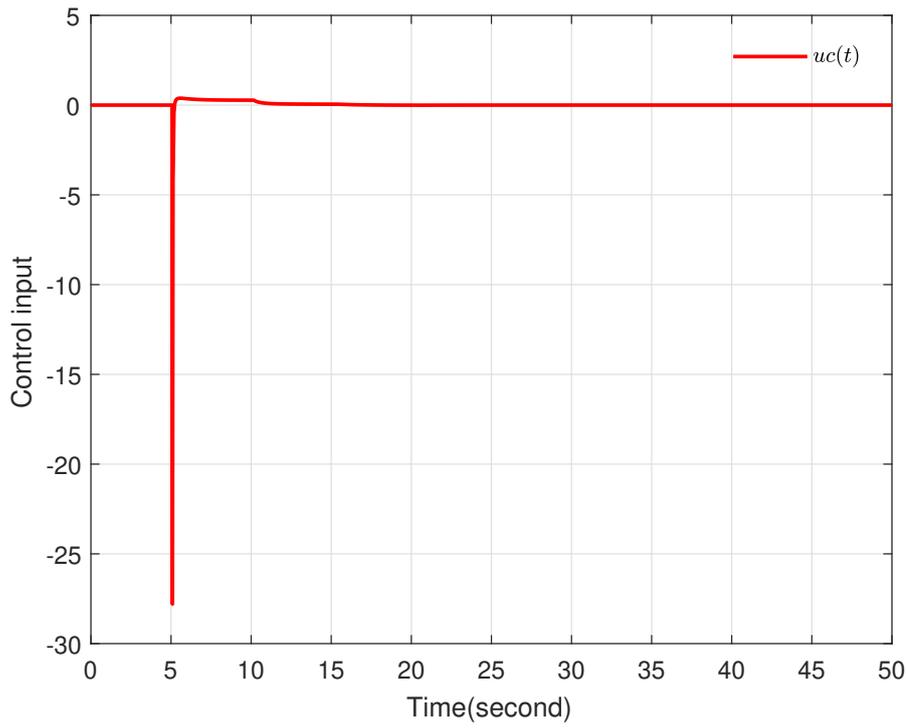


شكل 3.4: حالات النظام باستخدام متحكم غير ذي تأخر

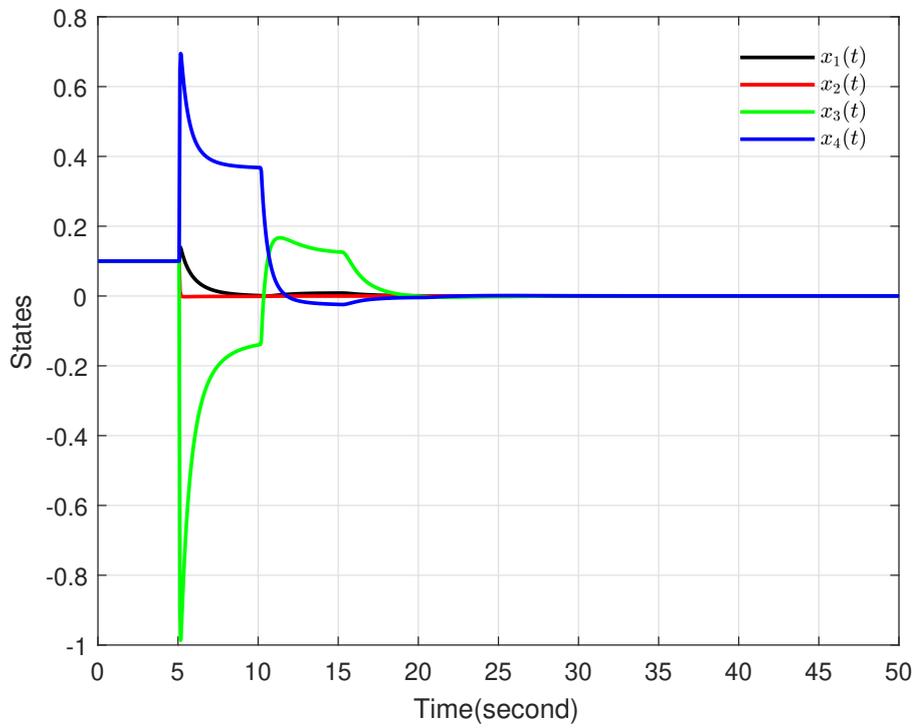
نلاحظ من خلال الشكل 3.3 والذي يمثل إشارة التحكم الخاصة بالنظام أن المتحكم قد أخذ قيمة عظمى بعد زمن التأخر والذي يقدر تقريبا بخمس ثوان وذلك لإعادة النظام لوضع الاستقرار. نلاحظ من الشكل 3.4 أن الحالة x_3 قد استغرقت أطول زمن استقرار خلافا لبقية الحالات، وكذلك بلغ الطول من الذروة إلى الذروة مبلغا كبيرا جدا يكاد يصل إلى 1.35 قبل أن يبدأ في التخامد والثبات. نلاحظ أن استخدام المتحكم غير ذي تأخر كان له أثر بالغ في جعل النظام مستقرا وهذه مزية كبيرة جدا لأهمية الاستقرار في الأنظمة، لكن هذه النتيجة استغرقت وقتا لا بأس به نسبيا وهي تكاد تقارب 26 ثانية. ومما سبق يظهر لنا جليا أن المتحكم قد ضمن استقرار النظام إلا أنه يبقى بحاجة إلى تحسينات لضمان أداء أحسن وهذه هي المهمة المنوطة بالتركيبية المقترحة من طرفنا.

3.4.3 أداء النظام بالمتحكم المقترح

بعد استخدامنا للمتحكمين معا في إطار التركيبية المقترحة في هاته المذكرة تحصلنا على النتائج المعطاة بالشكلين 3.5 و 3.6



شكل 3.5: إشارة المتحكم المقترح



شكل 3.6: حالات النظام باستخدام المتحكم المقترح

نلاحظ أن استخدام التركيبة المقترحة المكونة من المتحكمين معا أدت الغرض المطلوب منها حيث حافظت على استقرار النظام وحسنت من زمن استجابة النظام بشكل أفضل نسبيا من المتحكم الأول حيث أننا وجدنا أن الزمن المستغرق لا يتجاوز الـ 20 ثانية وهي نتيجة جيدة جدا.

لإبراز ميزات التركيبة المقترحة ومدى تحسينها لأداء النظام سنقوم بالتركيز على x_3 والتي تعتبر الحالة الأسوأ والأبطأ للنظام. نتائج الدراسة المقارنة بين المتحكم غير ذي تأخر و التركيبة المقترحة معطاة في الجدول 3.2.

المتحكم	غير ذي تأخر	المتحكمين معا	نسبة التحسين
زمن الاستقرار	26	20	23 %
قيمة x_3 من الذروة الى الذروة	1.36	1.16	15 %
$\int_0^{ts} (x_3^2) dt$	2.5540	0.7771	70 %
$\int_0^{ts} (u^2) dt$	12.8476	7.1868	40 %

جدول 3.2: تكهيم نتائج الدراسة المقارنة

من خلال جدول النتائج يظهر جليا أن استخدام المتحكمين معا أعطى نتائج أحسن بكثير حيث نلاحظ أن التركيبة المقترحة أعطت تحسنا كبيرا ملحوظا في زمن الاستقرار يقدر بـ 23%، ومن جهة أخرى يسمح المتحكم المقترح بتخفيض قيمة الذروة بـ 15% مما يحافظ على مستشعرات الحالة، أما كتقييم كلي فإن التركيبة المقترحة تعطي تحسنا جيدا في أداء الحالات بنسبة مرتفعة ويعكس سرعة الاستجابة التي يضمنها نظام التحكم المقترح مقارنة بالمتحكم غير ذي تأخر. أما فيما يخص الطاقة المستهلكة خلال عملية التحكم فإن التركيبة المقترحة تسمح بتوفير ما يقارب 40% مقارنة بطاقة التحكم المستهلكة من طرف المتحكم غير ذي تأخر.

3.5 الخلاصة

لقد استعرضنا في هذا الفصل نتائج المحاكاة حيث قمنا فيه بتجربة المتحكمات التي قمنا بدراستها على نظام عنفة مائية فقمنا بتجربة المتحكم غير ذي تأخر والذي يستخدم بشكل رئيسي بغرض الاستقرار وقد وجدنا أن هذا النوع من وحدات المتحكمات يوفر اليسر في التصميم ويضمن الاستقرار لنظام الحلقة المغلقة. ثم قمنا باستخدام التركيبة المقترحة المكونة من المتحكمين معا حيث أن المتحكم غير ذي تأخر كان الغرض من استخدامه ضمان الاستقرار أما المتحكم ذو تأخر صرف فالغرض منه تحسين النتائج وقد وجدنا أن استخدام هذه التركيبة يمكننا من الحصول على زمن استقرار أفضل وتحسن ممتاز في الطاقة المستهلكة يكاد يصل إلى نصف الطاقة المستهلكة في المتحكم الأول وقد أثبتت التركيبة المقترحة كفاءتها على جميع المستويات.

خلاصة عامة

اعتنت هذه المذكرة بدراسة استقرارية الأنظمة غير الخطية ذات الرتب الكسرية المنمذجة بالأنظمة الضبابية من نوع تاكاجي سوجينو بغرض تذليلها والسيطرة عليها وتحسين أدائها.

لقد كان التحكم في استقرارية الأنظمة ذات التأخر مشكلا مطروحا لفترة طويلة من الزمن وأغلب الدراسات المعاصرة قاصرة نوعا ما في التعامل مع هذا النوع من الأنظمة وذلك لأن معظمها يكتفي باستخدام متحكم وحيد غير ذي تأخر ويعتمد عليه بشكل كلي في التحكم فضلا عن دراسة الأنظمة ذات الرتب الكسرية.

لذلك قمنا في هذه المذكرة بمزاوجة المتحكم غير ذي تأخر ومتحكم ذو تأخر صرف بغرض دراسة تأثيرهما معا على استقرارية الأنظمة المتأخرة ذات الرتب الكسرية المنمذجة بطريقة تاكاجي سوجينو وذلك لأجل الاستفادة من مزايا كل متحكم منهما لأن المتحكم غير ذي تأخر يسمح بالتحكم في الاستقرارية، أما المتحكم ذو التأخر الصرف يسمح بتحسين الأداء. في هذا السياق لاحظنا وجود شيء من الشبه في منهجية الدراسة مع الأنظمة غير الخطية التقليدية من ناحية البنية الأساسية خصوصا في جزئية استخدام دالة ليايونوف مع التنبه لوجود بعض الاختلافات الجذرية من ناحية الخواص الرياضية المستعملة، وقد قمنا بتأكيد النتائج المدروسة عن طريق القيام بمحاكاة جربنا فيها استخدام المتحكمات على نموذج قياسي لنظام عنفة مائية .

من خلال تحليل النتائج لاحظنا أن المتحكم غير ذي تأخر مكننا من التحكم في استقرارية النظام وهذا شيء محمود جدا ولكن بأداء متواضع لذلك قمنا بتجربة استخدام تركيبة المتحكمين معا بغرض تحسين الأداء فوجدنا أن استخدام تركيبة المتحكمين أعطت تحسنا ملحوظا في زمن الاستقرار وأعطت كذلك فرقا كبيرا في الطاقة المستهلكة بنسبة تقارب نصف الطاقة المستهلكة من المتحكم الأول خلال عملية التحكم وأعطت كذلك تحسنا كبيرا في قيمة الخطأ وفي القيم من الذروة إلى الذروة وهذه تعتبر نتيجة حسنة جدا بالنسبة للأداء.

كأعمال مستقبلية نقترح القيام بدراسة مستقلة حول صلابة هذا النوع من الأنظمة ثم محاولة إيجاد صيغ خاصة جديدة بدالة ليايونوف و تجربة استخدام متحكم تكاملي صرف ودراسة تأثيره على الاستقرارية والأداء ثم سنحاول الجمع بين دراسة عدد من تراكيب المتحكمات و تجربتها على عدد من الأنظمة الحقيقية لمحاولة إيجاد نتائج تحكم أفضل لعل ذلك قد يخلف أثرا عميقا في التحليل والتصميم لهذا النوع من الأنظمة، وللأنظمة الحقيقية ككل.

المصادر

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, .2006
- [2] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, .1998
- [3] M. Tawil. *Matrices Theory and Applications*. Cairo University, .1996
- [4] M. Spivak. *Calculus*. Publish or Perish, .2008
- [5] H. P. Murray and C. B. Morrey. *Computational Methods for Fluid Flow*, pages .453--421 Springer, New York, 2 edition, .1985
- [6] L. Wang and H. K. Lam. A new approach to stability and stabilization analysis for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, pages ,2465--2460 .2018
- [7] K. Gu, J. Chen, and V. Kharitonov. *Stability of Time-Delay Systems*. Springer, .2003
- [8] N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud, and J. A. Gallegos. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, pages ,2957--2951 .2014
- [9] P. Mahmoudabadi and M. Tavakoli-Kakhki. Improved stability criteria for nonlinear fractional order fuzzy systems with time-varying delay. *Soft Computing*, pages ,4226--4215 .2022
- [10] E. Fridman. *Introduction to Time-Delay Systems Analysis and Control*. Springer, .2010
- [11] J. H. Lilly. *Fuzzy Control and Identification*. Springer, .2010
- [12] N. S. Nise. *Control Systems Engineering*. Wiley, .2014

- [13] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Pearson, .2001
- [14] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, .2009
- [15] Y. Zheng, Y. Nian, and D. Wang. Controlling fractional order chaotic systems based on Takagi-Sugeno fuzzy model and adaptive adjustment mechanism. *Physics Letters A*, pages ,129--125 .2010
- [16] Y. Tian, B. Wang, P. Chen, and Y. Yang. Finite-time Takagi–Sugeno fuzzy controller design for hydraulic turbine governing systems with mechanical time delays. *Renewable Energy*, pages ,624--614 .2021
- [17] J. C. Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier, and A. Oustaloup. Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations. *Signal Processing*, pages ,445--437 .2011
- [18] P. Mahmoudabadi, M. Shasadeghi, and J. Zarei. New stability and stabilization conditions for nonlinear systems with time-varying delay based on delay-partitioning approach. *ISA Transactions*, pages ,52--46 .2017
- [19] P. Mahmoudabadi and M. Tavakoli-Kakhki. Fuzzy observer–based disturbance rejection control for nonlinear fractional-order systems with time-varying delay. *Journal of Vibration and Control*, pages ,2154--2145 .2021