

# The bouncing balls and pi

naar een idee van Dirk Danckaert

10 juni 2015

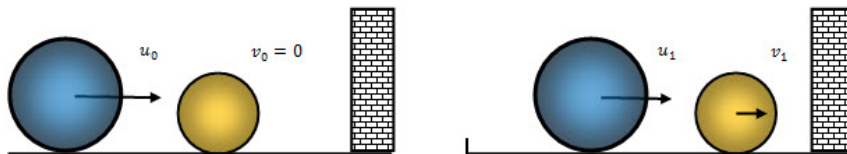
## Samenvatting

Wiskundecollega Dirk Danckaert ontdekte onlangs een merkwaardig filmpje op het internet (<https://www.youtube.com/user/numberphile>) waarin Ed Copland een gedachte-experiment uitlegt waarmee hij de decimalen van  $\pi$  berekent aan de hand van twee botsende ballen. De proef is in realiteit moeilijk uitvoerbaar omdat de massaverhouding van de twee puntmassa's zeer groot moet zijn en omdat de botsingen ook volledig elastisch moeten zijn. De verklaring van Copland voor dit fenomeen trok me sterk aan omdat ze een link legt met lineaire transformaties in vectorruimten, met eigenwaarden en met eigenvectoren. Aangemoedigd door de eenvoud van het eindresultaat van deze afleiding, ging Dirk Danckaert op zoek naar een compactere verklaring. Die vond hij door de vectorruimte van Ed Copland uit te breiden tot een inproductruimte.

## 1 Probleemstelling

Stel, je hebt een zware bal met massa  $M$  en een lichte met massa  $m$ . Je geeft de zware bal een beginsnelheid  $u_0$  in de richting van de lichte bal. De lichte bal heeft beginsnelheid  $v_0 = 0$ .

De zware bal botst op de lichte. We veronderstellen dat deze botsing volledig elastisch is. Dit wil zeggen dat er behoud is van totale (kinetische) energie en dat er behoud is van impuls. Hierdoor wordt de zware bal een beetje afgeremd en krijgt de lichte bal een bepaalde snelheid in de richting van een (elastische) muur. We noemen deze snelheden na één botsing  $u_1$  en  $v_1$ .



Figuur 1: Beginsituatie en situatie na de eerste botsing

Na de botsing tegen de muur keert de lichte bal in tegengestelde zin terug zonder verlies van snelheid. De snelheidsvectoren van beide ballen zijn nu eventjes tegengesteld georiënteerd. Na een tweede botsing tussen beide ballen, zal de zware bal weer een beetje afgeremd worden en zal de lichte bal opnieuw aan

snelheid winnen. De twee snelheidsvectoren  $u_2$  en  $v_2$  wijzen nu in dezelfde richting. De vraag die in dit artikel wordt opgelost is "Hoeveel botsingen zullen er zijn vooraleer de zware bal zo sterk afgeremd is dat de volgende tik zijn snelheidsvector zal doen omkeren?". Dit aantal botsingen blijkt een onverwachte relatie te hebben met het getal  $\pi$ .

Na de terugkeer zal de zware bal bij elke tik van de lichte bal aan snelheid winnen. De lichte bal zal hierdoor meer en meer afgeremd worden. Na een aantal botsingen moet de snelheid van de zware bal onvermijdelijk groter worden dan die van de lichte. De lichte kan de zware nu niet meer inhalen. Het tweede probleem dat in dit artikel een oplossing vindt, is: "Hoeveel botsingen zijn er geweest vooraleer de lichte bal de zware uit het oog verliest?".

## 2 Algebraïsche structuur

We vertalen het fysische gegeven van een elastische botsing in het behoud van de totale kinetische energie (voor en na de  $n$ -de botsing):

$$M \cdot u_{n+1}^2 + m \cdot v_{n+1}^2 = M \cdot u_n^2 + m \cdot v_n^2$$

en behoud van de totale impuls (voor en na de  $n$ -de botsing):

$$M \cdot u_{n+1} + m \cdot v_{n+1} = M \cdot u_n - m \cdot v_n.$$

De verwisseling van het teken van de snelheidsvector  $v_n$  staat voor de omkering van de bewegingszin van de lichte bal na elke botsing met de zware.

De preciese massa's van de twee ballen blijken niet relevant te zijn voor de verdere berekeningen maar wel de massaverhouding  $k = \frac{M}{m}$ . We vormen de bovenstaande vergelijkingen bijgevolg om tot:

$$\begin{cases} k \cdot u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = k \cdot u_n^2 + v_n^2 \\ k \cdot u_{n+1} + v_{n+1} = k \cdot u_n - v_n \end{cases}.$$

Wellicht wekt het verbazing dat deze niet-lineaire formules toch aanleiding geven tot een lineaire transformatie in de vectorruimte  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$ . Je kan narekenen dat dit stelsel equivalent is met de uitdrukking:

$$\begin{pmatrix} \frac{k-1}{k+1} & \frac{-2}{k+1} \\ \frac{2k}{k+1} & \frac{k-1}{k+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

die we in het vervolg zullen afkorten tot:

$$A \cdot B_n = B_{n+1}.$$

Om de snelheid van beide ballen te berekenen na  $n$  botsingen volstaat het om de  $n$ -de macht te berekenen van de matrix  $A$  en de begintoestand  $B_0$  van beide ballen te kennen.

**Voorbeeld 2.1.** *Stel dat de massaverhouding van de ballen gegeven is als  $k = 16$ . Neem  $u_0 = 17$  en  $v_0 = 0$ . We berekenen hieruit de toestandsmatrix  $B_n$  aan de hand van de beginmatrix  $B_0 = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \end{pmatrix}$  en de overgangsmatrix  $A = \begin{pmatrix} \frac{15}{17} & \frac{-2}{17} \\ \frac{32}{17} & \frac{15}{17} \end{pmatrix}$ . Het resultaat vind je in de onderstaande evolutietabel.*

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9, 4 \\ 54, 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 7 \\ 67, 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6, 4 \\ 62, 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -13, 0 \\ 43, 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -16, 6 \\ 13, 6 \end{pmatrix}$

Uit deze tabel leiden we af dat de snelheid van de zware bal na 3 botsingen voldoende is afgenomen om teruggekataapulteerd te worden. Na 6 botsingen is de snelheid van de zware bal zo sterk (in absolute waarde) toegenomen dat hij niet meer in te halen is door de lichte.

**Opmerking 2.1.** De positieve snelheden in deze tabel moeten geïnterpreteerd worden als bewegingen naar de muur toe en negatieve snelheden als verwijderingen van de muur. Hoewel iteraties mathematisch onbeperkt doorlopen, zullen de toestanden vanaf  $B_7$  in het bovenstaande voorbeeld geen fysische interpretatie meer hebben. Het botsen houdt immers op van wanneer de snelheid van de zwaarste bal (in absolute waarde) groter geworden is dan de snelheid van de lichtste bal.

**Voorbeeld 2.2.** Nemen we een massaverhouding  $k = 61$  en beginsnelheden  $u_0 = 31$  en  $v_0 = 0$  dan kunnen we op de volgende evolutietabel opstellen.

$i$	0	1	...	6	7	...	11	12
$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 31 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 61 \end{pmatrix}$	...	$\begin{pmatrix} 1, 3 \\ 241, 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6, 5 \\ 236, 6 \end{pmatrix}$	...	$\begin{pmatrix} -29, 2 \\ 80, 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30, 8 \\ 20, 6 \end{pmatrix}$

Na de 6 tikken wordt de zware bal teruggekaatst. Na 12 botsingen haalt de lichte bal de zware niet meer in. Net zoals in het vorige voorbeeld is het aantal tikken na de terugslag gelijk aan het aantal tikken ervoor.

**Opmerking 2.2.** Indien we de beginsnelheid  $u_0 = 31$  veranderen in een andere beginsnelheid, zal de tabel zich evenredig aanpassen (ga dit na!). Deze wijziging verandert niets aan de kanteltijdstippen: het aantal botsingen vooraleer de zware bal terugkeert en het aantal botsingen vooraleer de zware bal volledig ontsnapt aan de bekogeling van de lichte. De kanteltijdstippen zijn dus alleen afhankelijk van de massaverhouding  $k$  van de twee ballen.

Als de tweede bal niet vanuit stilstand vertrekt, moeten er meer gegevens in rekening gebracht worden dan alleen de massaverhouding  $k$  om de kanteltijdstippen te berekenen.

### 3 Eigenwaarden en eigenvectoren

Om een directe formule te vinden voor de toestandsmatrix  $B_n$  is het nuttig een gesloten uitdrukking te vinden voor de matrix  $A^n$ . Een klassieke techniek voor de berekening van een  $n$ -de macht van een matrix is via het diagonaliseren van deze matrix.

Met dit doel voor ogen berekenen we eerst de eigenwaarden en daarna de eigenvectoren van de matrix  $A$ .

**Stelling 3.1.** *De eigenwaarden van de matrix*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{k-1}{k+1} & \frac{-2}{k+1} \\ \frac{2k}{k+1} & \frac{k-1}{k+1} \end{pmatrix}$$

*zijn gelijk aan  $\lambda_1 = \cos \theta + \sin \theta \cdot i$  en  $\lambda_2 = \cos \theta - \sin \theta \cdot i$  met  $\cos \theta = \frac{k-1}{k+1}$ .*

*Bewijs.* De eigenwaarden van de matrix  $A$  zijn de nulwaarden van de karakteristieke veeltermfunctie. We berekenen deze eigenwaarden uit de vergelijking:

$$\left(\frac{k-1}{k+1} - \lambda\right)^2 + \frac{4k}{(k+1)^2} = 0$$

die equivalent is met:

$$((k-1) - (k+1)\lambda)^2 = (2i\sqrt{k})^2.$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn complex toegevoegd. Je kan narekenen dat hun modulus gelijk is aan 1.

$$\lambda_1 = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2\sqrt{k}}{k+1} \cdot i \text{ en } \lambda_2 = \frac{k-1}{k+1} - \frac{2\sqrt{k}}{k+1} \cdot i$$

Dit betekent dat de eigenwaarden op de eenheidscirkel liggen en dat ze in goniometrische vorm kunnen geschreven worden als:

$$\lambda_1 = \cos \theta + \sin \theta \cdot i \text{ en } \lambda_2 = \cos \theta - \sin \theta \cdot i.$$

□

Om de  $n$ -de macht van de overgangsmatrix  $A$  te berekenen, moeten we onder andere de  $n$ -de macht berekenen van de eigenwaarden. De  $n$ -de machten van complexe getallen op de eenheidscirkel, zoals  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ , staan voor rotaties rond de oorsprong. In de laatste paragraaf van dit artikel zal blijken dat rotaties een cruciale rol spelen in de overgang tussen opeenvolgende toestandsmatrices bij het probleem van de botsende ballen. In deze laatste paragraaf manipuleren we de huidige lineaire transformatie zo dat ze overgaat in een zuivere rotatie rond de oorsprong.

**Stelling 3.2.** *De eigenvectoren van de matrix*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{k-1}{k+1} & \frac{-2}{k+1} \\ \frac{2k}{k+1} & \frac{k-1}{k+1} \end{pmatrix}$$

*zijn gelijk aan*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{k} \cdot i \end{pmatrix} \text{ en } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{k} \cdot i \end{pmatrix}.$$

Het bewijs van deze stelling laten we over aan de lezer.

**Voorbeeld 3.1.** *Indien de ballen in dit experiment een massaverhouding  $k = 16$  hebben dan zijn de eigenwaarden gelijk aan:*

$$\lambda_1 = \frac{15}{17} + \frac{8}{17} \cdot i \text{ en } \lambda_2 = \frac{15}{17} - \frac{8}{17} \cdot i.$$

*De bijbehorende eigenvectoren zijn achtereenvolgens:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \cdot i \end{pmatrix} \text{ en } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \cdot i \end{pmatrix}.$$

## 4 Machtsverheffing van de overgangsmatrix $A$

De berekening van de eigenwaarden en eigenvectoren stelt ons in staat om de matrix  $A$  te diagonaliseren als  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ . De kolommen van de matrix  $P$  zijn opgebouwd uit de eigenvectoren van  $A$  en de diagonaal van de diagonaalmatrix  $D$  is opgebouwd uit de overeenkomstige eigenwaarden van  $A$ . Dit levert de volgende drie factoren op:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{k} \cdot i & \sqrt{k} \cdot i \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos \theta + \sin \theta \cdot i & 0 \\ 0 & \cos \theta - \sin \theta \cdot i \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{k}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\sqrt{k}} \end{pmatrix}$$

Om de  $n$ -de macht van de diagonaalmatrix te berekenen, moeten we vervolgens gebruik maken van de stelling van de Moivre:

$$D^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) + \sin(n\theta) \cdot i & 0 \\ 0 & \cos(n\theta) - \sin(n\theta) \cdot i \end{pmatrix}.$$

Deze hulpberekeningen maken het mogelijk om de  $n$ -de macht te berekenen van de matrix  $A$  via de formule  $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{k} \cdot i & \sqrt{k} \cdot i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(n\theta) + \sin(n\theta) \cdot i & 0 \\ 0 & \cos(n\theta) - \sin(n\theta) \cdot i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{k}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\sqrt{k}} \end{pmatrix}.$$

Als we deze matrix zorgvuldig langs rechts vermenigvuldigen met de beginmatrix  $B_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  dan vinden we de toestand na  $n$  botsingen (reken na!):

$$B_n = A^n \cdot B_0 = \begin{pmatrix} u_0 \cdot \cos(n\theta) \\ \sqrt{k} u_0 \cdot \sin(n\theta) \end{pmatrix}$$

waaruit we makkelijk kunnen afleiden na hoeveel botsingen de zware bal terug zal keren. De oriëntatie van de snelheidsvector van deze bal verandert namelijk op het moment dat  $u_0 \cos(n\theta)$  van teken wisselt m.a.w. op het moment dat de hoek  $n\theta$  groter wordt dan  $\frac{\pi}{2}$ .

**Voorbeeld 4.1.** *Keren we terug naar het basisvoorbeeld waarbij  $k = 16$ . We vinden de hoek  $\theta$  via de formule  $\cos \theta = \frac{k-1}{k+1}$ . Uit deze formule volgt dat:*

$$\theta = \arccos \frac{15}{17} = 0,4899 \dots$$

*Deze hoek gaat iets meer dan 3 keer in de rechte hoek. Op deze manier hebben we snel berekend dat er 3 tikjes nodig zijn tegen de zware bal vooraleer hij naar de andere kant gekatapulteerd wordt.*

## 5 De decimalen van pi

In het vorige voorbeeld berekenden we dat voor  $k = 16$  het aantal tikjes van de lichte bal tegen de zware vooraleer die rechtsomkeer maakt gelijk is aan  $p = 3$ . Als we een gelijkaardige berekening zouden maken voor  $k = 16 \cdot 100$  dan blijkt het aantal stoten van de lichte bal tegen de zware gelijk te zijn aan  $p = 31$ . Voor  $k = 16 \cdot 100^2$  vinden we  $p = 314$ . De aandachtige lezer ziet in de massaverhoudingen ( $k$ ) een meetkundige rij en in de kantelmomenten ( $p$ ) de decimale ontwikkeling van  $\pi$ . Deze overwegingen leiden tot de volgende stelling.

**Stelling 5.1.** *Stel dat twee puntmassa's een massaverhouding hebben gelijk aan  $k_n = 16 \cdot 100^n$ . De zware puntmassa botst volledig elastisch tegen de lichte puntmassa in rust. Hierdoor wordt een heen-en-weer-gaande beweging veroorzaakt van de lichte puntmassa die afwisselend botst tegen een muur en tegen de zware puntmassa. Na  $p_n$  botsingen tussen de zware en de lichte puntmassa draait de bewegingszin van de zware massa om. Het aantal botsingen  $p_n$  is op de volgende manier gelinkt aan het getal  $\pi$ :*

$$p_n = \lfloor 10^n \pi \rfloor$$

wat betekent dat voor de massaverhouding  $k_n$  de  $n$  eerste beduidende cijfers van  $\pi$  in het getal  $p_n$  tevoorschijn komen.

*Bewijs.* We gaan uit van de gelijkheid  $\cos \theta = \frac{k-1}{k+1}$ . Bij grote waarden van  $k$  horen kleine waarden van  $\theta$ . We benaderen beide leden van deze gelijkheid door een reeksontwikkeling (die snel convergeert naarmate  $k$  groter wordt of naarmate  $\theta$  kleiner wordt). Voor kleine waarden van  $\theta$  kunnen we de reeksontwikkeling  $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$  beperken tot de eerste termen zo dat:

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}. \quad (1)$$

Voor grote waarden van  $k$  (en kleine waarden van  $\frac{1}{k}$ ) kunnen we de volgende reeksontwikkeling opstellen:

$$\frac{k-1}{k+1} = \frac{1 - \frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - \dots\right).$$

Beperken we deze reeksontwikkeling tot de eerste twee termen dan vinden we:

$$\frac{k-1}{k+1} \approx 1 - \frac{2}{k}. \quad (2)$$

Uit de gelijkstelling van (1) en (2) vinden we de volgende benadering die geldt voor grote waarden van  $k$  en kleine waarden van  $\theta$ :

$$\theta \approx \frac{2}{\sqrt{k}}. \quad (3)$$

We zoeken een veelvoud van  $\theta$  dat net iets kleiner is dan  $\frac{\pi}{2}$ . Hiemee bedoelen we een  $p_n$ -voud waarvoor geldt dat:

$$p_n \theta < \frac{\pi}{2} < (p_n + 1)\theta.$$

In combinatie met (3) levert dit de volgende ongelijkheid op:

$$\frac{2p_n}{\sqrt{k_n}} < \frac{\pi}{2} < \frac{2(p_n + 1)}{\sqrt{k_n}}.$$

Via de formule  $k_n = 16 \cdot 100^n$  vinden we dat  $p_n$  moet voldoen aan:

$$\frac{2p_n}{\sqrt{16 \cdot 100^n}} < \frac{\pi}{2} < \frac{2(p_n + 1)}{\sqrt{16 \cdot 100^n}}$$

of aan

$$p_n < 10^n \pi < p_n + 1.$$

Deze uitspraak is equivalent met  $p_n = \lfloor 10^n \pi \rfloor$ . □

## 6 Zonder eigenwaarden en eigenvectoren

Het inzicht van de rotatie rond de oorsprong, dat we verkregen hebben bij de berekening van de machten van de eigenwaarden, blijkt essentieel te zijn. Vandaar dat een kernachtigere redenering zich opdringt.

We hernemen hiervoor het stelsel

$$\begin{cases} k \cdot u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = k \cdot u_n^2 + v_n^2 \\ k \cdot u_{n+1} + v_{n+1} = k \cdot u_n + v_n \end{cases}.$$

Merk vooraf op dat het toestandsteken van de snelheid van de lichte bal in deze benadering in de variabele  $v_n$  bevat is. Vervang nu de grootheid  $\sqrt{k}u_n$  door de nieuwe variabele  $w_n$ . Het stelsel gaat dan over in een stelsel met variabelen  $w_n$  en  $v_n$ :

$$\begin{cases} w_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = w_n^2 + v_n^2 \\ \sqrt{k} \cdot w_{n+1} + v_{n+1} = \sqrt{k} \cdot w_n + v_n \end{cases}$$

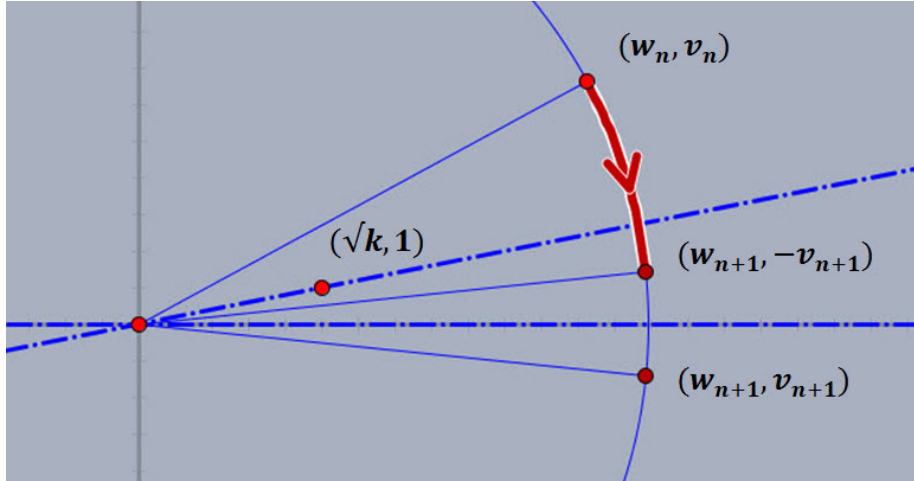
De vectoren  $(w_n, v_n)$  en  $(w_{n+1}, v_{n+1})$  die voldoen aan dit stelsel zijn makkelijk te interpreteren in de vectorruimte  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ , + uitgerust met het klassieke scalaire product. We werken vanaf nu dus in een inproductruimte of in een Euclidische ruimte. In inproductruimten zijn afstanden en hoeken gedefinieerd aan de hand van het scalaire kwadraat en het scalaire product.

Uit de eerste vergelijking leiden we af dat de vector  $(w_n, v_n)$  even ver van de oorsprong ligt als de vector  $(w_{n+1}, v_{n+1})$ . Dit betekent dat toestandsvectoren voor en na een botsing van de twee ballen op dezelfde cirkel rond de oorsprong liggen.

De tweede vergelijking geeft aan dat het scalair product  $(\sqrt{k}, 1) \cdot (w_n, v_n)$  gelijk is aan het scalair product  $(\sqrt{k}, 1) \cdot (w_{n+1}, v_{n+1})$ . Dit betekent dat de hoek tussen de vectoren  $(\sqrt{k}, 1)$  en  $(w_n, v_n)$  gelijk is aan de hoek tussen de vectoren  $(\sqrt{k}, 1)$  en  $(w_{n+1}, v_{n+1})$ . De enige grafische interpretatie hiervan is dat de opeenvolgende toestandsvectoren  $(w_n, v_n)$  en  $(w_{n+1}, v_{n+1})$  elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de drager van de vector  $(\sqrt{k}, 1)$ .

Na de botsing van de zware en de lichte bal, onderzoeken we het effect van de botsing van de lichte bal tegen de muur. Deze botsing laat de vector  $(w_{n+1}, v_{n+1})$  overgaan in de vector  $(w_{n+1}, -v_{n+1})$ . Dit betekent dat de toestandsvector  $(w_{n+1}, v_{n+1})$  gespiegeld wordt rond de  $w$ -as.

De samenstelling van deze twee spiegelingen met snijdende assen is een rotatie rond het snijpunt van deze assen over een hoek die het dubbele is van de hoek tussen de twee spiegellijnen. Na elke twee opeenvolgende botsingen van de lichte bal (eentje met de zware bal en eentje met de muur) zal de toestandsvector  $(w_n, v_n)$  dus een rotatie in wijzerzin ondergaan rond de oorsprong over een hoek  $\alpha = 2 \cdot \arctan(\frac{1}{\sqrt{k}})$  (zie onderstaande figuur).



Figuur 2: Rotatie van de toestandsvector

Via deze rotaties kunnen we berekenen hoeveel tikjes de lichte bal tegen de zware geeft vooraleer deze rechtsomkeer maakt.

**Voorbeeld 6.1.** Nemen we voor massaverhouding het getal  $k = 4299$  dan vinden we een rotatiehoek gelijk aan  $\alpha = 0,015250\dots$ . Deze hoek gaat ongeveer 103 keer in de rechte hoek (reken na:  $\frac{\pi/2}{0,015250\dots} = 103,00001\dots$ ). Dit betekent dat na 103 tikjes de toestandsvector  $(w_0, 0)$  over een rechte hoek in tegenwijzerzin rond de oorsprong gedraaid is en dat de snelheid  $w_{103}$  nog net niet negatief is. Ook de snelheid  $v_{103}$  is dan nog net niet negatief.

Na 206 tikjes is de toestandsvector  $(w_0, 0)$  net niet over een gestrekte hoek gedraaid. Hieruit leiden we af dat de snelheidsvector  $v_{206}$  nog steeds negatief en bijna nul is. De lichte bal zal de zware dus niet meer kunnen inhalen.

**Opmerking 6.1.** Het vorige voorbeeld suggereert dat het aantal tikjes vooraleer de zware bal terugkeert altijd de helft is van het totale aantal tikjes tussen de zware en de lichte bal. Dit klopt niet helemaal. Soms is het totale aantal tikjes één meer dan het dubbele van het aantal tikjes vooraleer de zware bal terugkeert. Stel bijvoorbeeld  $k = 1600$ . Het aantal botsingen vooraleer de zware bal terugkeert is 62. Het totale aantal botsingen is 125.

De vraag of het mogelijk is dat de lichte bal uiteindelijk in rust komt bij een rationale massaverhouding  $k$  blijft voorlopig nog open. Deze situatie doet zich alleen voor indien de hoek  $2 \cdot \arctan(\frac{1}{\sqrt{k}})$  een geheel aantal keer in de gestrekte hoek gaat.

Een triviaal voorbeeld hiervan vinden we voor  $k = 1$ . De hoek  $2 \cdot \arctan(\frac{1}{\sqrt{k}}) = \frac{\pi}{2}$  is immers een deler van de gestrekte hoek. Indien beide ballen even zwaar



zijn, zal de bal in het midden na één heen-en-weer-beweging roerloos blijven liggen.

Een tweede voorbeeld vinden we voor  $k = 3$ . De hoek  $2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{\pi}{3}$  is eveneens een deler van de gestrekte hoek. In dit geval zal de lichte bal in het midden na drie tikjes met de zware bal in rust komen.

Of er nog andere rationale massaverhoudingen zijn die deze merkwaardige eigenschap bezitten, moet nog verder uitgezocht worden.