Teoría del potencial

Luis Alberto González José A01039137

Regulo Arturo Rosado Romero A00816645

12 de mayo de 2016

1 Introducción

La idea de la teoría del potencial se originó en el siglo XIX con la idea de que toda fuerza en el universo provenía de un potencial que satisfacía la ecuación de Laplace[1] $\nabla^2 u = 0$, donde ∇^2 es operador de Laplace o "laplaciano", y u es una función real.

Hoy en día se sabe que los potenciales no están limitados a las lineales, sino también a algunas no-lineales que no cumplen con la ecuación de Laplace, como las ecuaciones de Einstein o las de Yan-Milles. No obstante, el término de "teoría del potencial" se sigue usando para generalizar a las ecuaciones que cumplen con la igualdad del laplaciano.

La intención de este escrito es dar apertura a los interesados en esta teoría del potencial, mostrando la idea general con algunas aplicaciones. Así mismo, se aborda la publicación de J.M Gordillo y M. Pérez-Sabordi: *Ruptura de la simetría axial para burbujas con un alto número de Reynolds*, donde dan uso a la teoría del potencial para determinar la dinámica del movimiento.

2 Teoría del potencial

Con las menciones anteriores, es evidente que existe una correspondencia entre la teoría del potencial y la teoría de la ecuación de Laplace. A diferencia de la teoría de Laplace, que estudia las propiedades de la función, la teoría del potencial analiza las propiedades descritas por la función.

La teoría del potencial es, a forma simplificada: un estudio de funciones armónicas. Las funciones armónicas son aquellas ecuaciones que evidentemente, tienen derivadas parciales continuas en el primer y segundo orden.

A todo campo donde se pueda resolver su gradiente de campo escalar, se le define a esa misma como su función potencial, de la siguiente forma:

$$F = -\nabla\varphi$$

El potencial puede ser conservativo o irrotacional. Donde se determina que es irrotacional si se cumple que $\nabla \cdot \varphi = 0$ Una forma de ver esta expresión en coordenadas cartesianas es

$$\nabla \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}$$

3 Usos y aplicaciones

Con años de investigación, se ha descubierto que se le puede dar un extensivo uso a la teoría a través de varios campos de la física, así como: campos electromagnéticos, análisis de fluidos y campos gravitatorios, entre otros.

3.1 Conductor Esférico

El físico Oliver Kellogg, en su libro, "*Fundaciones de la teoría del potencial*"(pg.177), aborda un problema sobre un conductor esférico[2]: se quiere determinar la distribución electrostática de una carga dada en un conductor esférico.

(a) $U = const\ , \quad 0 \le \varrho \le a, \quad \nabla^2 U = 0, \quad a < \varrho\ ;$

(b) U es continua en todas partes ;

(c) las derivadas de primer orden de U son continuas en todas partes, salvo para $\varrho = a$; aquí se satisface la ecuación

$$\frac{\partial U}{\partial n_+} - \frac{\partial U}{\partial n_-} = -4\pi\sigma\,,$$

σ siendo la densidad de carga distribuida ;

(d) $\varrho U \to E$ mientras $\varrho \to \infty$

Asumiendo que U solo depende de ϱ, se substituye $U = U(\varrho)$ y la función tomará la forma:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\varrho^2}\frac{d}{d\varrho}\varrho^2\frac{dU}{d\varrho} = 0 \tag{1}$$

dada la condición de (a),

$$\varrho^2\frac{dU}{d\varrho} = c_1\,, \quad U = -\frac{c_1}{\varrho} + c_2\,, \quad \varrho > a\,.$$

La condición (d) muestra que $c_2 = 0$ y que $c_1 = -E$ y con eso se obtiene que,

$$U = \frac{E}{\varrho}\,, \quad a \leq \varrho\,,$$
$$U = \frac{E}{a}\,, \quad \varrho \leq a\,.$$

Esto da el potencia, y la densidad σ se encuentra con lo siguiente:

$$-\frac{E}{a^2} - 0 = -4\pi\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{E}{4\pi a^2}\,.$$

Por lo que se determina que la densidad es constante. Para la revisión de esto, se determina que la integral sobre la superficie, da la carga total.

$$\int_S U d\varrho = E_{total}$$

3.2 Mecánica de Fluidos

La teoría de potencial tiene su aplicación en la mecánica de fluidos en varias ecuaciones, como por ejemplo, la ecuación de Euler del movimiento de un fluido[3]

$$\frac{dv}{dt} = f - \frac{1}{\rho}\bigtriangledown p$$

donde $f(r)$ es la fuerza externa por unidad de masa actuando en un fluido.

3.3 Uso de la teoría en una publicación

En la publicación de de J.M. Gordillo y M. Pérez-Saborid, "Ruptura de la simetría axial para burbujas con un alto número de Reynolds", se habla de la estructura del flujo irrotacional cerca del radio mínimo de una burbuja con simetría axial en un instante antes de reventar[4]. Se aborda el análisis del flujo irrotacional haciendo uso de la teoría del potencial. Específicamente se usan ecuaciones de Laplace y Bernoulli para el potencial de velocidad (ϕ) y de presión (p).

$$\nabla^2\phi = (1/r)(r\phi_r)_r + (\phi_z)_z = 0$$

Interfaz gas-liquido

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\bigtriangledown\phi|^2}{2} + p = P$$

estas dos ecuaciones se resuelven usando un argumento de la teoría del potencial

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \upsilon \cdot \bigtriangledown F = 0$$

en la que $F = r - f(z,t)$... En esta ultima ecuación F es el potencial de interfaz gas-liquido.

4 Referencia

[1] M.L. Boas, Mathematical Methods in the Physical Sciences, 3rd ed. (Wiley-India, New Delhi, 2010).

[2] O.D. Kellogg, Foundations Of Potential Theory (Ungar, New York, 1970).

[3] Hsu, H. P. (n.d.). Applied Vector Analysis. Fairleigh Dickinson Univesity.

[4] J.M. Gordillo & M. Pérez-Saborid. Axissymmetrix breakup of bubbles at high Reynold numbers. Journal of Fluid Mechanics.Vol.562. P.303-312. Biblioteca ITESM, Mty. 10 de septiembre de 2006.

[5] H.P. Hsu, Applied Vector Analysis (Fairleigh Dickinson Univesity, n.d.).

[6] G.B. Arfken and H.-J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, 4th ed. (Academic Press, San Diego, 1995).

[7] Hernández Aranda, R. (Ene-May 2016). Curso de física matemática. Lecturas presentadas en ITESM, Mty.

5 Coevaluación y agradecimientos

Luis Alberto González José A01039137:

Durante el proyecto, percibí una excelente cooperación de mi compañero Regulo. Aprendimos mutuamente y nos apoyábamos con cada duda que nos surgía. Agradezco al profesor por su gran apoyo y sus enseñanzas tanto dentro como fuera de clase. Calificaría a mi compañero y a mí mismo con un 10/10. Nuestro escrito final también percibo que recibirá una nota de 10/10. Nos esmeramos en dar lo mejor de nosotros, sacándole provecho al sistema de referencias del Tec, haciendo usos de libros y publicaciones de revistas científicas. Al final del proyecto, solo se eligieron las fuentes que fueron relevantes para la investigación, pero cabe mencionar que, durante la búsqueda de información, se encontraron muchas otras cosas que nos dejó conocimiento sobre otros temas.

Regulo Arturo Rosado Romero A00816645:

Mi compañero Luis demostró interés total en el proyecto, se mostró puntual en las reuniones para la realización del mismo. No tuvimos problemas a la hora de elegir el tema del proyecto. Se desarrolló en el entorno de biblioteca de manera eficiente, investigando los temas pertinentes y necesarios para realizar la investigación. Mostró cooperación y empatía a la hora de ayudarme.Le otorgo un 10/10 en todos los aspectos. Al evaluarme a mi mismo, me parece que mostré el interés adecuado a la hora de realizar este proyecto. Asistí con puntualidad a las sesiones de del mismo. A la hora de buscar publicaciones científicas para complementar nuestra información, fui bastante eficiente. Ayude a Luis cuando él me lo solicito. Durante las sesiones de trabajo demostré interés y dedicación. Me doy un 10/10 en todos los rublos para este trabajo.