TEORÍA DE NÚMEROS

Sebastian Alzate Vargas

19 de mayo

1. EJERCICIO: Obtenga la siguiente congruencia

$$a^7 \equiv a \mod (42) \;\; \textit{para todo } a$$

prueba:

► por colorario sabemos que

$$a^7 \equiv a \mod (7) \tag{i}$$

►Ahora por teorema tenemos

$$\begin{aligned} a^1 &\equiv 1 \mod (2) \\ a^6 &\equiv 1 \mod (2) \\ a^6 * a &\equiv 1 * a \mod (2) \\ a^7 &\equiv a \mod (2) \qquad \text{(ii)} \end{aligned}$$

►nuevamente por el teorema de Fermat

$$\begin{aligned} a^2 &\equiv 1 \mod (3) \\ a^6 &\equiv 1 \mod (3) \\ a^6 * a &\equiv 1 * a \mod (3) \\ a^7 &\equiv a \mod (3) \qquad \text{(iii)} \end{aligned}$$

Luego de (i),(ii) y (iii) se concluye que:

$$\begin{aligned} \therefore a^7 &\equiv a \mod (7 * 2 * 3) \\ a^7 &\equiv a \mod (42) \end{aligned}$$

■

2. EJERCICIO: Usando congruencias, resolver la siguiente ecuacion diofántica

$$4x + 51y = 9$$

Prueba:
tenemos que $\gcd(4, 51) = 1$
asi

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 9 \quad \text{mód } (51) \\ x &\equiv 15 \quad \text{mód } (51) \end{aligned}$$

ahora con x=15 tenemos que

$$4 * (15) + 51y = 9$$

$$y = -1$$

sabemos que

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t$$

$$y = y_0 - \frac{a}{d}t$$

por tanto

$$x = 15 + 51t$$

$$y = -1 - 4t$$

■

3. EJERCICIO: Obtenga tres enteros consecutivos, cada uno tiene factor cuadrado

Prueba: Sea $2^2 \mid a$, $3^2 \mid a+1$, $5^2 \mid a+2$

$$\blacktriangleright\ a \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright\ a+1 &\equiv 0 \pmod{9} \\ a &\equiv -1 \pmod{9} \\ -1 &\equiv 8 \pmod{9} \\ a &\equiv 8 \pmod{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright\ a+2 &\equiv 0 \pmod{25} \\ a &\equiv -2 \pmod{25} \\ -2 &\equiv 23 \quad \text{mód } (25 \\ a &\equiv 23 \pmod{25} \end{aligned}$$

Ahora, utilizando el teorema Chino de los residuos, tenemos:

$$N = 4 * 9 * 25 = 900$$

$$\begin{aligned} N_1 &= 225 \\ N_2 &= 100 \\ N_3 &= 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= 8 \\ b_3 &= 23 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \blacktriangleright\ 225a_1 &\equiv 1 \pmod{4} \\ a_1 &\equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright\ 100a_2 \equiv 1 \mod (9)$$
$$a_2 \equiv 1 \mod (9)$$

$$\blacktriangleright\ 36a_3 \equiv 1 \mod (25)$$
$$11a_3 \equiv 1 \mod (25)$$
$$a_3 \equiv 16 \mod (25)$$

Ahora la solucion, esta dada por

$$\begin{aligned} A &= N_1 b_1 a_1 + N_2 b_2 a_2 + N_3 b_3 a_3 \mod (N) \\ &= 225 * 0 * 1 + 100 * 8 * 1 + 36 * 23 * 16 \mod (900) \\ &= 800 + 13248\ mod(900) \\ &= 14048 \mod (900) \end{aligned}$$

De lo cual,

$$14048 \equiv 548 \mod (900)$$

Por tanto $a = 548$, y asi

$$a = 548 \tag{1}$$
$$a + 1 = 549 \tag{2}$$
$$a + 2 = 550 \tag{3}$$

4. EJERCICIO: Muestre que si p=4k+3 es un primo y $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$, entonces

$$a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$$

Prueba: razonando por el absurdo supongamos que

$$a \not\equiv b \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Tenemos que $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ahora por el teorema de Fermat obtenemos:

$$a^{4k+2} \equiv 1 \pmod{p} \tag{i}$$

Y por hipotesis tenemos que:

$$a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$$

elevando a ambos lados a 2k+1

$$(a^2)^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1}(b^2)^{2k+1} \pmod{p}$$

de (i)

$$\begin{aligned} 1 &\equiv -(b^2)^{2k+1} \pmod{p} \\ 1 &\equiv -b^{4k+2} \pmod{p} \\ -1 &\equiv b^{4k+2} \pmod{p} \qquad \text{(ii)} \end{aligned}$$

como $b \not\equiv 0\ mod(p)$ por teorema de Fermat

$$b^{4k+2} \equiv 1 \pmod{p} \tag{iii}$$

Luego de (ii) y (iii)

$$-1 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$-2 \equiv 0 \pmod{p}$$

$\longrightarrow\!\longleftarrow$ porque $p \nmid -2$ donde p=4k+3

$$\therefore\ a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$$

$\blacksquare$

5. EJERCICIO: muestre que $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$ parta cada entero positivo.

Prueba: Por definicion tenemos que $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ que es la suma de todos los divisores de n; ahora podemos reescribir la formula como $\sum_{d|n} \frac{n}{d}$ que son los d que dividen a n, los cuales son divisores de n que a su vez diveden n.

asi tenemos:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} \frac{n}{d}$$

dividiendo por n

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$$

$\blacksquare$