Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

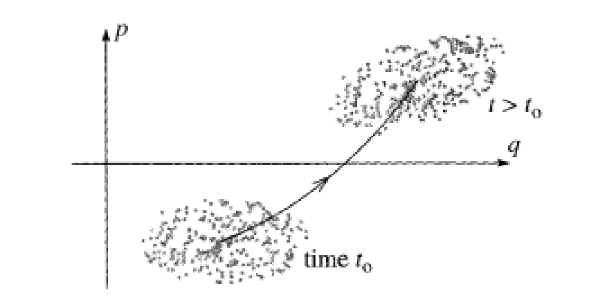
Teorema de Liouville

Asignatura: Mecánica II
Catedrático: Lic. Carlos Gabarrete

Presentado por:
Nargin Ávila
David Rosales
Kevin M. Rico
Pabel Galo

Miércoles 30 de Marzo de 2016

Teorema de Liouville
Es un resultado de la mecánica Hamiltoniana sobre la evolución temporal de un sistema mecánico. Un conjunto de partículas con condiciones iniciales cercanas pueden representarse por la región conexa que ocupa en el espacio de fase.
El teorema establece que dicha región mantendrá invariante su volumen a pesar de que se estirar y se encogerá a medida que cada partícula evolucione.



Las ecuaciones de Hamilton determinan la velocidad con la que cada punto se mueve a través del espacio de fase:

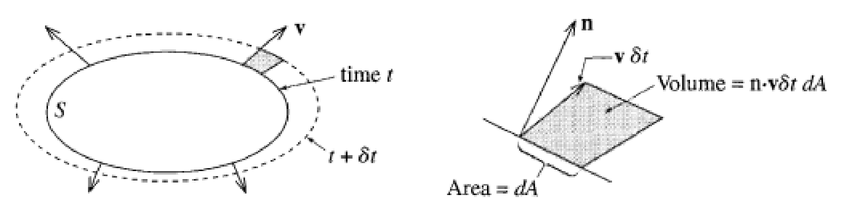
$$\dot{z} = \quad (\dot{q}, \dot{p}) = (\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q})$$

En general, puntos diferentes tendrán velocidades diferentes y la nube puede cambiar su forma y orientación. Por otro lado, como demostraremos en breve, el volumen ocupado por la nube no puede cambiar.

Cada punto en la superficie cerrada define un unico conjunto de condiciones iniciales y se mueve por la órbita correspondiente del espacio de fase a medida que el tiempo avanza.
Es fácil ver que cualquier punto que esta inicialmente dentro de la superficie debe permanecer dentro de ella durante todo el tiempo, por ejemplo, supongamos que un punto que inicialmente está en el interior pudiera salir fuera. Entonces en ciertos momentos tendría que cruzar la superficie que de mueve. En ese momento tendría dos orbitas distintas cruzándose entre sí, lo cual sabemos es imposible. Cualquier punto que inicialmente fuera de la superficie permanecerá fuera durante todo el tiempo. El número de puntos que están de la supercie es una constante de tiempo.

El volumen de la superficie cerrada que se desplaza es constate en el tiempo.
Para demostrarlo necesitamos conocer la relación entre la tasa de variación de este tipo de volumen y divergencia del vector velocidad.

Volúmenes cambiantes.
Imaginémonos un espacio tridimensional lleno de un fluido de movimiento. El fluido en cada r se esta moviendo con velocidad v. para cada posición r hay una única velocidad v,pero v puede, por supuesto, tener valores distintos en puntos r distintos; por ello podemos escribir $v = v(r)$. Cada punto de fase se esta moviendo con una velocidad que esta únicamente determinada por su posición en el espacio de fase $\dot{z} = \dot{z}(z)$


v
time t
S
$t + \delta t$
n
v δt
Volume = n·vδt dA
Area = dA

Si introducimos un vector unitario n en la direccion de la normal hacia afuera de S,entonces la altura del cilindro es $nv\delta t$ y su volumen es $nv\delta tdA$, lo que implica que V esta aumentando. Si v apunta hacia dentro, entonces es negativo y V estaría disminuyendo. En particular, si el flujo es incomprensible, de modo que V no puede cambiar, exactamente para que $\frac{dV}{dt}$ pueda ser cero. Para una superficie S y un volumen V en tres dimensiones, pero igual para m dimensiones ambos vectores n y v tienen m componentes y su producto escalar es $n \cdot v = n_1 v_1 + ... + n_m v_m$ el resultado es válido sea cual sea el valor de m

Con un v hacia afuera, el producto escalar $n \cdot v$ es positivo y la integral es positiva.
La variación total en el volumen encerrado por la superficie S se calcula añadiendo todas estas pequeñas contribuciones:

$$\delta V = \int_S n \cdot v \delta t dA$$

dividiendo ambos miembros por δt y haciendo $\delta t \to 0$, obtenemos el primero de los resultados claves:

$$\frac{dV}{dt} = \int n \cdot v dA$$

Teorema de la Divergencia
La divergencia se define como:

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

El teorema de la divergencia afirma que la integral de superficie puede expresarse en términos de $\nabla \cdot v$:

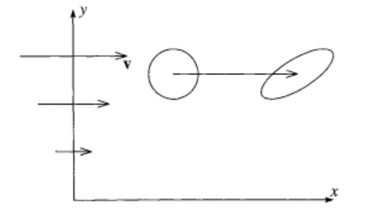
$$\int_S n \cdot v dA = \int_V \nabla \cdot v dV$$

En concreto, hay muchos flujos de fluidos interesantes que presentan la propiedad de que $\nabla \cdot v = 0$

Ejemplo: Un flujo laminar
la velocidad de flujo de cierto fluido es:

$$v = ky\hat{x}$$

Donde k es una constante; esto es, $v_x = ky$ y $v_y = v_z = 0$. Describir el movimiento de una superficie cerrada que empieza siendo una esfera. Evaluar la divergencia $\nabla \cdot v$ y mostrar que el volumen encerrado por cualquier superficie cerrada S que se mueve con el fluido no puede cambiar.



La velocidad v apunta en todas partes en la dirección x y dependiendo sólo de y. Entonces todos los puntos en cualquier plano $y = constante$ se mueven como una plancha rígida que se desliza. Si consideramos una superficie cerrada que se mueve con el fluido y es inicialmente esférica, entonces su parte de arriba será arrastrada más rápido que la parte de abajo, formando un elipsoide con excentricidad creciente. Se puede resolver facilmente $v_x = ky$ y $v_y = v_z = 0$ usando la definición:

$$\nabla \cdot v = 0$$

La divergencia se generaliza fácilmente a cualquier número de dimensiones. En un espacio m dimensionales con coordenadas $(x_1, ..., x_m)$ la divergencia de un vector $v = (v_1, ..., v_m)$ se define como:

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v_m}{\partial x_m}$$

Teorema de Liouville
Es un teorema sobre movimiento en el espacio de fases, el espacio 2n dimensional con coordenadas $z = (q, p) = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$. Para simplificar la notación, consideremos un sistema con un grado de libertad, de modo que n=1 y el espacio de fase es bidimensional con puntos de fase $z = (q, p)$. Cada punto de fase se mueve a través del espacio bidimensional de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton, con velocidad:

$$v = \dot{z} = (\dot{p}, \dot{q}) = (\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q})$$

Consideremos un superficie cerrada arbitraria S que se mueve a través del espacio de fases por los puntos de fases, el ritma al que varía el volumen dentro de S está dado por:

$$\frac{dV}{dt} = \int \nabla \cdot v dV$$

donde ahora el volumen es un volumen bidimensional:

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial q}(\frac{\partial H}{\partial p}) + \frac{\partial}{\partial p}(\frac{\partial H}{\partial q}) = 0$$

Que es cero por el orden de las dos derivaciones en las derivadas segundas es indiferente.
Como $\nabla \cdot v = 0$, se sigue que $\frac{dV}{dt} = 0$, y hemos demostrado que el volumen V encerrado por cualquier superficie cerrada es una constate cuando la superficie se mueve en el espacio de fase.


Gracias