Què és més gran? $2^{7^{7^2}}$ vs. $7^{2^{2^7}}$

Salvi Solà i Martinell

25 de maig de 2015

Resum

Demostrem que $A = 2^{7^{7^2}}$ és més [gran/petit] que $B = 7^{2^{2^7}}$ mitjançant un raonament explicat intuïtivament i fitant el valor d'un logaritme.

Raonament intuïtiu

El primer nombre és

$$2^{7^{7^2}} = 2^{7^{49}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \overset{7^{49})}{\cdots\cdots} \cdot 2 \cdot 2$$

o sigui, 2 multiplicat per ell mateix moooltes $\left(7^{49}\right)$ vegades. Veiem que si poséssim els dosos en grups de 3 s'obtindria

$$(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdots = 8^{7^{49}/3}$$

i si els ajuntéssim en grups de 2 s'obtindria

$$(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdots = 4^{7^{49}/2}$$

Però per poder comparar amb el segon nombre, hauríem d'ajuntar els dosos en grups que valguin 7 en comptes de 8 o 4. Per aconseguir-ho, farem *grups* de longitud L no entera. Volem que

$$(2 \cdot 2 \cdots) = 2^L = 7$$

i per tant cal prendre grups de longitud $L = \log_2 7$. Així tindrem que

$$2^{7^{7^2}} = 2^{7^{49}} = 2^{\log_2 7} \cdot 2^{\log_2 7} \cdots = 7^{\left(7^{49}/\log_2 7\right)}$$

Com que el segon nombre és

$$7^{2^{2^7}} = 7^{\left(2^{128}\right)}$$

per veure quin dels dos és més gran només cal veure quin dels dos exponents és més gran:

$$A := \frac{7^{49}}{\log_2 7} \qquad \text{vs.} \qquad B := 2^{128}$$

D'una banda,

$$7^{48} < A \quad \left(< 7^{49}\right)$$

D'altra banda, agrupant els dosos com abans, tenim que

$$B = 2^{128} = 7^{128/\log_2 7}$$

Trobem una fita inferior de $\log_2 7$:

$$2^8 = 256 < 343 = 7^3 \quad \Rightarrow \quad 2^{8/3} < 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{3} < \log_2 7$$

Aleshores,

$$B = 7^{128/\log_2 7} < 7^{128\cdot 3/8} = 7^{48} < A$$

i com que $A > B$, obtenim finalment que

$$\boxed{2^{7^{7^2}} > 7^{2^{2^7}}} \qquad \square$$

Nota

El raonament intuïtiu dels parèntesis de longitud no entera es pot substituir, amb rigor matemàtic, per la fórmula

$$\boxed{a^b = c^{b/\log_a c}}$$

que es pot demostrar prenent $\log_a$ als dos costats:

$$\log_a \left(a^b\right) = \log_a \left(c^{b/\log_a c}\right)$$

$$b \log_a (a) = \frac{b}{\log_a c} \log_a (c)$$

$$b = b \qquad \square$$

Comentaris

1. Estic tan poc acostumat a treballar amb logaritmes que he trigat una estona a acceptar una equació tan simple com

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

2. Passant d'una base a una altra, qualsevol torre de potències es pot expressar de forma

$$2^{a2^{b2^{c2^{d\dots}}}}$$

on $(a, b, c, d...)$ és una seqüència finita. Aplicant el logaritme de base 2 repetidament:

$$a2^{b2^{c2^{d\dots}}}$$

$$\log_2(a) + b2^{c2^{d\dots}}$$

$$\log_2 \left(\log_2(a) + b2^{c2^{d\dots}}\right)$$

no anem enlloc, així que no sé com comparar torres de potències en general.