Генерация выборки значений непрерывного случайного вектора

Браништи В. В.

9.11.2007

Пусть X – непрерывная случайная величина, имеющая функцию распределения $F_X(x)$. Найдём закон распределения вероятностей случайной величины $Y = F_X(X)$.

Случайная величина Y, очевидно, также является непрерывной. Обозначим её функцию плотности вероятности как $f_Y(y)$. Ясно, что

$$\forall y \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \quad f_Y(y) = 0.$$

Найдём $f(y)$ для $y \in (0; 1)$. Воспользуемся теоремой о плотности вероятности функции непрерывной случайной величины:

$$f_Y(y) = f_X(F_X^{-1}(y))\frac{d}{dy}F_X^{-1}(y) = f_X(F_X^{-1}(y))\frac{1}{\frac{dy}{F_X^{-1}(y)}} =$$

$$= f_X(F_X^{-1}(F_X(x)))\frac{1}{\frac{dF_X(x)}{dF_X^{-1}(F_X(x))}} = f_X(x)\frac{1}{\frac{dF_X(x)}{dx}} = f_X(x)\frac{1}{f_X(x)} = 1.$$

Таким образом, закон распределения вероятностей функции распределения вероятностей случайной величины от этой же случайной величины – равномерный в интервале $(0; 1)$. Это свойство используется для генерации псевдослучайных чисел с заданной функцией плотности вероятности.

Пусть имеется датчик, генерирующий значения случайной величины Y, равномерно распределённой в интервале $(0; 1)$. Тогда случайная величина

$$X = F_X^{-1}(Y)$$

имеет функцию плотности вероятности $f_X(x)$.

Пусть теперь $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – случайный вектор с функцией распределения $F_X(x_1, \ldots, x_n)$. Функция безусловного распределения первой компоненты X_1, как известно, имеет вид:

$$F_1(x) = F_X(x_1, +\infty, \ldots, +\infty) = \lim_{\substack{x_2 \to +\infty \\ \vdots \\ x_n \to +\infty}} F_X(x_1, \ldots, x_n).$$

На основе этой функции описанным выше способом получим псевдослучайное значение x_1 первой компоненты случайного вектора X.

Далее найдём условную функцию распределения второй компоненты X_2 при условии $X_1 = x_1$:

$$F_{2|X_1=x_1}(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{x_2} f_{2|X_1=x_1}(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x_2} \frac{f_{12}(x_1,t)}{f_1(x_1)}dt = \frac{1}{f_1(x_1)}\ \frac{\partial}{\partial s}F_{12}(s,x_2)\Big|_{s=x_1}.$$

Так как x_1 фиксировано, то $F_{2|X_1=x_1}(x_2)$ является функцией одной переменной, на основе которой генерируется соответствующее значение x_2 второй компоненты случайного вектора X.

Продолжая далее, найдём условную функцию распределения

$$F_{n|X_1=x_1,\ldots,X_{n-1}=x_{n-1}}(x_n)$$

последней компоненты X_n, на основе которой – соответствующее значение x_n.