Generalidades de las soluciones a las ecuaciones de Einstein en presecia de una densidad del vacio que decae monotonamente con el parametro de Hubble en un espacio-tiempo plano

En este trabajo se estudia el comportamiento general del parametro de Hubble para un universo plano que alberga un gas ideal con presion positiva o nula junto con una densidad del vacio compuesta por un termino de costante cosmologica y un termino proporcional a una potencia positiva del parametro de Hubble. Al final se hace el paralelo entre un universo en expansion y el fenomeno de colapso gravitacional esfericamente simetrico. Obtenemos como conclusion que algunas dependencias de la densidad del vacio que crecen mas rapido que H^2 inpiden la existencia de singularidades en procesos netamente gravitacionales.

I. UNIVERSO EN EXPANSION

Las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo plano compuesto por un fluido con ecuacion de estado $P = \omega\rho$ para un parametro $\omega > 0$ constante y una densidad del vacio con $P_V = -\rho_V \equiv -\Lambda/8\pi G$ son:

$$8\pi G\rho + \Lambda = H^2\,, \qquad 8\pi G\omega\rho - \Lambda = -2\dot{H} - 3H^2 \tag{1}$$

donde H es el parametro de Hubble. A partir de ellas podemos escribir una ecuacion diferencial para el parametro de Hubble que solo involucra la densidad del vacio y el parametro ω:

$$2\dot{H} + 3(1+\omega)H^2 = \Lambda(1+\omega)\,, \qquad \text{o} \qquad 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2(1+3\omega) = \Lambda(1+\omega) \tag{2}$$

Con esto tenemos que:

$$\ddot{a} = 0 \qquad \text{cuando} \qquad H^2 = \frac{1+\omega}{1+3\omega}\Lambda \tag{3}$$

$$\dot{H} = 0 \qquad \text{cuando} \qquad H^2 = \frac{1}{3}\Lambda \tag{4}$$

donde $(1+\omega)/(1+3\omega) > 1/3$ para todo ω (aunque estamos interesados solamente en el caso $\omega \geq 0$).

A partir de la primera ecuacion de Einstein tenemos que cuando $\dot{H} = 0$ se obtiene $H^2 = \Lambda/3$, con lo que la primera ecuacion de Einstein nos dice que $\rho = 0$. De esta manera, si la densidad del vacio no se anula, el parametro de Hubble tiene que estar acotado inferiormente por un valor estrictamente positivo.

II. DENSIDAD DEL VACIO QUE CRECE MAS RAPIDO QUE H^2

Si ahora asumimos la siguiente expresion para la dependencia temporal de la densidad del vacio:

$$\Lambda(t) = \Lambda_c + \beta H^\alpha \qquad \text{con} \qquad \alpha > 2 \tag{5}$$

obtenemos el siguiente analisis:

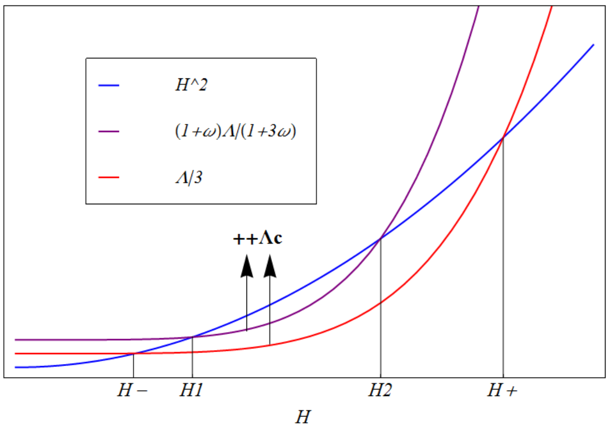

Figura 1: Valores para los cuales $\dot{H} = 0$ (H_- y H_+) y para los cuales $\ddot{a} = 0$ ($H1$ y $H2$). Adicionalmente tenemos que $\ddot{a} > 0$ en los intervalos $(H_-, H1)$ y $(H2, H_+)$, mientras que $\ddot{a} < 0$ en el intervalo $(H1, H2)$. Los valores $H > H_+$ y $H < H_-$ estan prohibidos por las ecuaciones de Einstein asumiendo que toda densidad debe ser mayor que cero.

1. Para el caso cuando la ecuacion $\ddot{a} = 0$ tiene dos soluciones diferentes $H1$ y $H2$ con $H1 < H2$. Debido a que $(1+\omega)/(1+3\omega) > 1/3$ para todo ω, tenemos que la ecuacion $\dot{H} = 0$ tambien tiene dos soluciones diferentes que denotamos como H_- y H_+ con $H_- < H_+$ (ver Figura 1).

   - Para el caso cuando $H^2 > H_+^2$, donde $H_+^2 \equiv \Lambda_+/3 = (\Lambda_c + \beta H_+^\alpha)$ define una de las soluciones con $\dot{H}_+ = 0$.

     Como $H^2 < \Lambda = (\Lambda_c + \beta H^\alpha)/3$ cuando $H > H_+$ entonces tenemos que $8\pi G\rho + \Lambda = 3H^2 < \Lambda$, para lo cual necesitariamos que $\rho < 0$. con esto concluimos que $H \leq H_+$, es decir, H esta acotado superiormente por H_+. Esto sucede solo cuando Λ crece mas rapido que H^2 y exite algun $H < H_+$ tal que $\Lambda < 3H^2$ (lo cual esta garantizado por la primera ecuacion de Einstein para un universo plano con densidades positivas ademas de la densidad del vacio). Adicionalmente, cuando $H \to H_+$, tambien a partir de la primera ecuacion de Einstein podemos concluir que $\rho \to 0$.

- Ahora, cuando $H^2 < H_-$, donde $H_-^2 \equiv \Lambda_-/3 = (\Lambda_c + \beta H_-^\alpha)$ define la otra sulucion a la ecuacion $\dot{H}_- = 0$.

  Debido a que $H^2 < \Lambda/3$ para $H < H_-$ obtenemos que $8\pi G\rho + \Lambda = 3H^2 < \Lambda$ y para eso es necesario que $\rho < 0$, lo cual no es posible. Asi que $H \geq H_-$ siempre, es decir, H se encuentra acotado inferiormente por el valor H_-, y esto sucede solo cuando Λ crece mas rapido que H^2 y se cumpla que $H^2 > 3\Lambda$ para algun $H > H_-$. Esto ultimo es satisfecho por un universo plano en la presencia de un fluido adicional al vacio con densidad positiva. Nuevamente podemos concluir que cuando $H \to H_-$ tenemos $\rho \to 0$.

En este caso tenemos que el universo se expande aceleradamente para $H > H2$, despues se expande desaceleradamente para $H1 < H < H2$ y nuevamente se expande aceleradamente para $H < H1$. Por otro lado $\rho \to 0$ cuando H tiende a sus valores limite mientras que $\Lambda \to H^2 =$ cte. impidiendo la formacion de una singularidad.

2. Analisis del caso cuando la ecuacion $\ddot{a} = 0$ tiene solo una solucion H'. Nuevamente, debido a que $(1+\omega)/(1+3\omega) > 1/3$ para todo ω, tenemos que la ecuacion $\dot{H} = 0$ tiene dos soluciones diferentes que denotamos como H_- y H_+ con $H_- < H_+$. En este caso tenemos que el universo se expande aceleradamente siempre, excenpo para $H = H'$, donde $\ddot{a} = 0$.

   Como en el caso anterior, obtenemos que el parametro de Hubble esta acotado entre los valores $H_- \leq H \geq H_+$, y que $\rho \to 0$ cuando H tiende a sus valores limite, mientras que Λ tiende $3H^2 =$ cte. inplicando la ausencia de singularidades.

3. En el caso en que $\ddot{a} = 0$ no tiene soluciones pero la ecuacion $\dot{H} = 0$ aun tien dos soluciones diferentes H_- y H_+ con $H_- < H_+$. Esto es posible ya que $(1 + \omega)/(1 + 3\omega) > 1/3$ para todo ω. En este caso tenemos que el universo siempre se expande

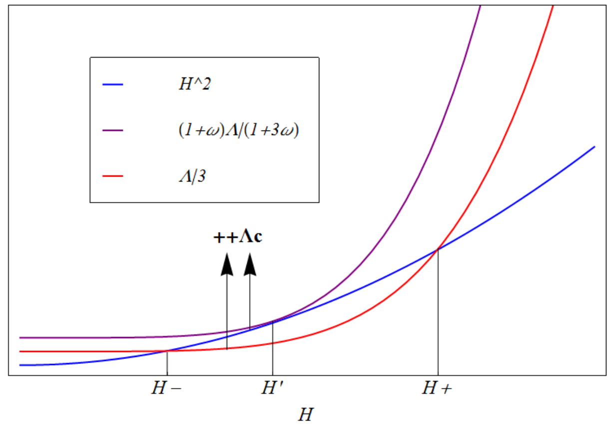

Figura 2: Cuando $\ddot{a} = 0$ tiene una solucion

aceleradamente, y como en los dos caso anteriores, obtenemos que el parametro de Hubble esta acotado entre los valores $H_{-} \leq H \geq H_{+}$, acotando tambien los valores de Λ mientras que $\rho \rightarrow 0$ en los caoss limite impidiendo la formacion de sigularidades.

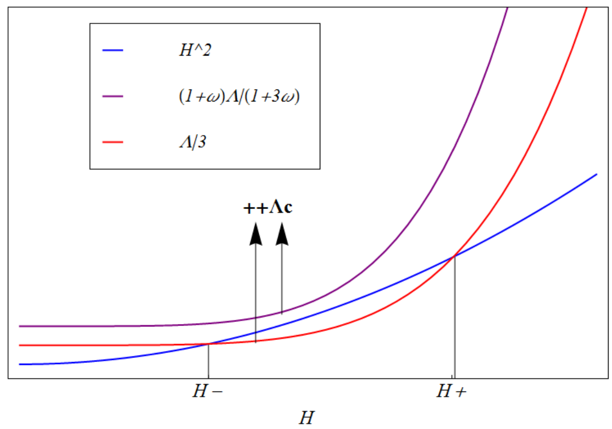

Figura 3: Cuando $\ddot{a} = 0$ no tiene soluciones

4. En los casos en que la ecuacion $\dot{H} = 0$ tiene solo una solucion o no tiene solucion, a partir de la primera ecuacion de Einstein, tenemos que $\rho < 0$, por lo tanto no se trata de casos de interes fisico.

El caso mas interesante resulta ser el primero, donde el parametro de Hubble esta acotado entre dos valores finitos y positivos impidiendo un estado icicial singular, comenzado con un periodo de expansion acelerado dominado por una densidade del vacio que decrece lentamente (la idea es que modele el periodo inflacionario), seguido de un perido desacelerado dominado por la densidad ρ (que debe tratarse en un caso mas realista de una mezcla de materia oscura, bariones, fotones, y neutrinos), para luego volver a un estado dominado por la densidad del vacio que tiende a un valor constante produciendo nuevamente un periodo de expansion acelerada.

III. CUANDO H^2 CRECE MAS RAPICO QUE LA DENSIDAD DEL VACIO

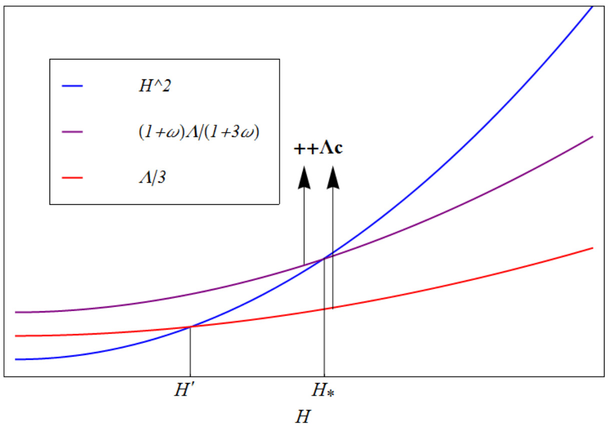

Figura 4: Este es el caso en que Λ crece mas despacio que H^2.

Suponiendo la dependencia temporal de la densidad del vacio como:

$$\Lambda(t) = \Lambda_c + \beta H^{\alpha} \qquad \text{con} \qquad \alpha < 2 \tag{6}$$

En este caso, tanto la ecuacion $\ddot{a} = 0$ como la ecuacion $\dot{H} = 0$ tienen soluciones unicas H' y $H*$ respectivamente, y con $H' > H*$. En este caso el universo tiene una singularidad inicial, partiendo de $H \to \infty$, seguido de un periodo de expansion desacelerada para $H < H'$. Como en los casos anteriores, a partir del analisis de la primera ecuacion de Einstein tenemos que los valores $H < H*$ estan prohibidos. De esta manera el universo termina en un periodo acelerado mientras $h \to H* = \text{cte.}$ y $\rho \to 0$.

Este comportamiento no difiere mucho cualitativamente del comportamiento del modelo estandar ΛCDM, formado por un periodo inicial de expansion acelerada dominada por fluidos con presion positica (que extrapolado hacia el pasado lleva a la formacion de una singularidad inicial) y seguidos de un periodo final acelerado dominado por una densidad del vacio que tiende a un valor constante.

IV. COLAPSO ESFERICAMENTE SIMETRICO

Haciendo la analogia: universo en expansion - colapso gravitacional tenemos que para los casos 1, 2 y 3 de la seccion II (cuando la ecuacion $\dot{H} = 0$ tiene dos soluciones) el colapso gravitacional termina con un periodo desacelerado (periodo inicial acelerado para el caso de un universo en expansion), con $H \to H_+ =$ cte. y $\dot{a} \to 0$ mientras $\rho \to 0$, sin la formacion de una singularidad y por lo tanto sin la formacion de un agujero negro.

Mientras que en el caso en que H^2 crece mas rapido que la densidad del vacio (seccion III) el estado final es un colapso acelerado (estado inicial desacelerado en el caso de un universo en expnasion) donde H crece monotonamente (y por lo tanto tambien lo hace la densidad total dominada por la densidad con presion positiva) formando una singularidad (que en general podria ser una singularidad desnuda o un agujero negro).

V. CONCLUSIONES

Cuando tenemos una densidad del vacio monotonamente creciente con el parametro de Hubble de la forma $\Lambda(t) = \Lambda_c + \beta H^\alpha$, y con $\alpha < 2$ obtenemos un universo plano con una singularidad inicial que se expande desaceleradamente en un comienzo debido al dominio de los fluidos con presion positiva, pero con un periodo final de expansion acelerado con $H \to$ cte. dominada por la densidad del vacio, lo cual se trata de un sistema cualitativamente igual al modelo $LambdaCDM$. El resultado analogo para un sistema que colapsa gravitacionalmente resulta en la formacion de una singularidad debido a que el periodo final es simpre un colapso acelerado (inicial desacelerado para el caso del universo en expansion) con una densidad total que crece monotonamente con el tiempo.

Cuando tenemos $\alpha > 0$, es decir, cuando la densidad del vacio crece mas rapidamente que H^2, en el caso fisico de un universo plano compuesta por densidades mayores que cero, tenemos que el parametro de Hubble esta acotado entre dos valores finitos y mayores que cero, siendo el caso mas interesante cuando la ecuacion $\ddot{a} = 0$ tiene dos soluciones. En tales casos el universo comienza con un periodo acelerado dominado por el vacio (no singular) pasando o no por un periodo desacelerado dominado por los fluidos con presion positiva (si la ecuacion $\ddot{a} = 0$ tiene o no soluciones) y terminando con un periodo de expansion nuevamente acelerada una vez mas dominado por el vacio y donde $H \to$ cte.. El caso en el que esta presente un periodo intermedio donde la expansion es desacelerada es el caso de mayor interes fisico, ya que reproduciria cualitativamente el periodo inflacionario, los periodos dominados por la radiacion y la materia, y el periodo actual (acelerado). Analogamente al caso del universo en expansion, un sistema que colapsa gravitacionalmente tendra un estado final desacelerado (inicial acelerado para un universo en expansion) sin la formacion de una singularidad, ya que el parametro de Hubble junto con la densidad del vacio tienden a ser constantes y la densidad con presion positiva tiende a cero.