

# Dúvida

Proposta 27, Pg 173

May 14, 2014

## Alínea 1

Sabemos que o mínimo do domínio de  $f$  é 0. O enunciado diz-nos que a área por baixo do gráfico da função  $f$  é dado pela função  $A$ . Portanto:

$$A(x) = \int_0^x f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^x f(x)dx = \ln \left( 1 + \sin^2 \frac{x}{2} \right)$$

Derivando ambos os lados,

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(x)dx = \frac{d}{dx} \left[ \ln \left( 1 + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \right] = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

Mas, pelo teorema fundamental do cálculo, o lado esquerdo é simplesmente:

$$f(x) - f(0) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(x)dx$$

Logo, como pela figura se observa claramente que  $f(0) = 0$ , inferimos:

$$f(x) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

Temos agora grande parte do problema resolvido. Agora só precisamos de calcular:

$$\int_{\pi/3}^{\pi} f(x)dx = \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 + \sin^2 \frac{x}{2}} dx = \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{2 \cos \frac{x}{2}}{(\sin \frac{x}{2})^{-1} + \sin \frac{x}{2}} dx$$

Onde no último passo dividimos ambos os termos da fração por  $\sin(x/2)$ , assumindo que  $x \neq 0$ , pois só nos interessa agora o intervalo  $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ .

Definindo então  $y := \sin(x/2)$ , concluímos que  $dy = \frac{1}{2} \cos(x/2)dx \Rightarrow 4 \frac{dy}{dx} = 2 \cos(x/2)$ . Assim, substituindo, obtemos:

$$4 \int_{x=\pi/3}^{x=\pi} \frac{1}{y^{-1} + y} dy = 4 \int_{x=\pi/3}^{x=\pi} \frac{y}{1 + y^2} dy$$

Onde, no último passo, multiplicamos ambos os termos da fração por  $y$ , novamente assumindo  $y \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ .

Consequentemente, este integral é fácil de avaliar:

$$4 \int_{x=\pi/3}^{x=\pi} \frac{y}{1+y^2} dy = \frac{4}{2} \int_{x=\pi/3}^{x=\pi} \frac{2y}{1+y^2} dy$$

O integrando é claramente  $\frac{d}{dy} \ln(y^2 + 1)$ , logo, temos simplesmente:

$$\begin{aligned} 2 \left[ \ln(y^2 + 1) \right]_{x=\pi/3}^{x=\pi} &= 2 \left[ \ln \left( \sin^2 \frac{\pi}{2} + 1 \right) - \ln \left( \sin^2 \frac{\pi}{6} + 1 \right) \right] = \\ &= 2 [\ln(2) - \ln(5/4)] = 2 \ln \left( \frac{8}{5} \right) \end{aligned}$$

O meu problema é este fator de 2. O passo que eu acho mais "duvidoso" e que possivelmente poderá não estar certo é o passo da mudança de variável, mas mesmo assim acho que fiz tudo corretamente...