Parcial de Càlcul 1A (GRETA/GREVA). 10 d'abril de 2015

Exercici 1. Considereu el polinomi

$$z^5 - 2\,z^3 + 2z$$

1. Quantes arrels complexes té?
2. Calculeu les arrels en forma binomial.

Solució:

$z = 0$ és obviament una arrel, dividint per z queda

$$z^4 - 2\,z^2 + 2 = 0$$

que és biquadrada i té solució

$$z^2 = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i = \sqrt{2}\angle\pi/4$$

Ara en polars tenim $z = \sqrt[4]{2}\angle\pi/8 + k\pi$ o sigui $z = \pm\sqrt[4]{2}\cos(\pi/8) \pm \sqrt[4]{2}\sin(\pi/8)$ que, juntament amb $z = 0$ fan 5 arels complexes.

Exercici 2.

1. Expresseu en forma binomial $\dfrac{(2+i)}{(2-i)}\dfrac{(3+i)}{(3-i)} : i$
2. Prenent arguments a l'expressió enterior vegeu que

$$\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/3).$$

3. Justifiqueu l'afirmació $x - x^2 \leq \arctan x \leq x$ quan $x \geq 0$.
4. Usant els apartats 2 i 3, doneu un interval racional que contingui π: $17/9 \leq \pi \leq 10/3$.

Solució:

2) $\arg(2 \pm i) = \pm\arctan(1/2)$, $\arg(3 \pm i) = \pm\arctan(1/3)$ i $\arg i = \pi/2$. Com que l'argument del producte és la suma dels arguments tenim

$$\arctan(1/2) + \arctan(1/3) - (-\arctan(1/2) - \arctan(1/3)) = \pi/2,$$

que dividit per 2 dona l'expressió proposada.

3) Sigui $f(x) = x - \arctan x$ i $g(x) = \arctan x - (x - x^2)$. $f(0) = g(0) = 0$ i $f'(x) = 1 - (1 + x^2)^{-1}$, $g'(x) = (1 + x^2)^{-1} - 1 + 2x^2$. Clarament $f'(x) \geq 0$ per a tota x ja que $1 + x^2 \geq 1$. D'altra banda, $g'(x) = (2x^2 - x + 2)/(1 + x^2)$. El denominador és clarament positiu, mentre que el numerador és un polinomi biquadrat amb discriminant $1 - 2 \cdot 2 = -3 < 0$ i coeficient principal (2) positiu, per tant és sempre estrictament positiu.

   Tot plegat fa que f i g siguin creixents, per tant $f(x) \geq 0$ i $g(x) \geq 0$ per a tota $x \geq 0$ i aquestes afirmacions són equivalents a les desigualtats de l'apartat 3.

4) Per l'apartat 3 tenim: $1/2 - (1/2)^2 \leq \arctan(1/2) \leq 1/2$ i $1/3 - (1/3)^2 \leq \arctan(1/3) \leq 1/3$. Sumant obtenim $7/36 \leq \arctan(1/2) + \arctan(1/3) \leq 5/6$. Per l'apartat 2 el valor del mig és $\pi/4$. Multiplicant tot per 4 obtenim el resultat.